

私の数理工学・補遺

来嶋秀治

滋賀大学 データサイエンス学部

研究略歴

略歴

2002. 3. 東大 工 計数工学科 **数理工学**コース 卒

2004. 3. 同院 情報理工 数理情報学専攻 修士了

2007. 3. 同 博士了

博士論文「**MCMC法における近似精度保証と完璧サンプリング法**」

2007. 4.– 2010.3. 京大 数理解析研 助教

2010. 4.– 2022.3. 九大 システム情報科学研究所 准教授

2022.4.– 現在 滋賀大学 データサイエンス学部 教授

研究分野

数理工学, 理論計算機科学

キーワード

- ✓ **確率過程**: ランダムウォーク, MCMC (マルコフ連鎖モンテカルロ)
- ✓ **離散数学**: 劣モジュラ関数, グラフ
- ✓ **分散計算**: 自律分散ロボット, 自己安定

KSMAPのはなし

OR横断若手の会 (KSMAP)

本研究部会は、日本オペレーションズ・リサーチ学会の研究部会の一つであり、ORに関わる若手研究者の分野を超えた交流及び育成を目的としています。2005年度までは日本オペレーションズ・リサーチ学会・関西支部の研究会でしたが、2006年度より日本オペレーションズ・リサーチ学会直属の研究部会となり、「若手OR研究者の会」(2006年度、2007年度)、「若手によるOR横断研究」(2008年度、2009年度)として活動してきました。2010年度からは「OR横断若手の会」として活動しています。

本研究会では通常の研究発表に加え、卒論発表会や初学者向けのチュートリアルを含めて年間5、6回の開催を予定しています。多くの方の参加をお待ちしております。

※ 通称 'KSMAP' は関西支部時代のものですが、関西支部のみなさんには馴染みが深いと思われますので、今後も用いていきたいと思ひます。

メニュー ▶

- [次回の研究会](#)
- [活動実績](#)
- [歴代主査・幹事](#)



次回の研究会 ▶

本研究部会の活動は終了しました。これまでご参加頂いた皆様、どうもありがとうございました。

リンク ▶

滋賀大学DSセンターは企業連携に力を入れています。



データサイエンスと AIが創る 新たな社会を先導する

データサイエンス・AIイノベーション研究推進センター

Data Science and AI Innovation Research Promotion Center

全国ではじめてデータサイエンス系の教育研究センター、学部、大学院を開設した滋賀大学は、我が国のデータサイエンス・AIの教育研究をより一層推進するため、2022年4月、これまでの体制を拡充し、新センターを整備しました。国内トップレベルの新センターでは、Society5.0の到来の鍵をにぎるデータサイエンスとAIの先端研究を牽引するとともに、その価値を社会に伝え、企業・自治体と手を取り合い、社会に実装するための活動を進めます。

Take Home Message

若手の方

- 共同研究（理論）にご興味の方はお気軽にお問い合わせください.
- 楽しく研究してください.

企業の方

- 共同研究（実践）にご興味の方はお気軽にお問い合わせください.
 - **滋賀大学DSセンター**では, 企業連携を推進しています.

皆様

- 今後ともよろしくお願いいたします.

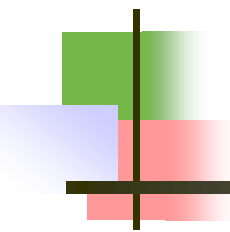
関係者

- 年寄りの会（15年後）まで研究頑張りましょう.

今日の話題

- (0. 春季大会講演ダイジェスト: 私の数理工学・広報版)
 - I. 私の数理工学・技術編1: **確率過程**と乱択アルゴリズム (20分)
 - II. 私の数理工学・技術編2: **数理計画**とゲーム理論 (20分)
 - III. 私の数理工学・技術編3: **計算論**とフラクタル (5分)

特別講演@春季大会
ダイジェスト



私の数理工学

来嶋秀治

九州大学 大学院システム情報科学研究所

東京大学 工学部 計数工学科

当学科のOR関係の研究室は3年半ほど前に紹介済み

それらにもとづく対象への働きかけ(制御)までの全体

数理工学者・技術者は、広い工学的技能・常識、古典的近代的数学の基本的な考え方に通じているにとどまらず、これを**自由**に駆使して工学の基礎的な問題にも現実の実践的な問題にも深く切り込むことができる。

---伏見正則

年生でも共通の部分が多く、互いに補い合って教育を行っています。工学部の他の学科が主として産業別の区分になっているのに対して、両学科は横断的な教育・研究をめざす学科であるといえます。

数理工学コースの目標はおおよ次のようになっています。——「数理」というのは単なる「数学」ないしはその「応用」のことではない。数理工学者・技術者は、広い工学的技能・常識、古典的近代的数学の基本的な考え方に通じているにとどまらず、これを自由に駆使して工学の基礎的な問題にも現場の実践的な問題にも深く切り込むことができる。——これはORの目標とよく似ているのではないでしょうか。

数理コースの科目の中には、位相・代数・線形・解析

というのは無限の彼方のように思われるらしく、のんびり構えていて最後にあわてふためく者が少なからずいるのは嘆かわしいことです。

年によって違いはありますが、学部卒業生の4～5割程度が修士課程に進学します。そのさいも、出身コースや卒業論文で配属された研究室とは別の研究室へ行くことを歓迎しています。修士課程修了者の大部分は就職しますが(学部卒を含む)、就職先は、学科の性格を反映して特定の業種に偏ることがなく、きわめて多方面にわたります。近頃話題になっている“工学部出身者の金融業への就職”は、当学科にとっては目新しいことではなく、学科発足当時から見られている現象です。

教官組織を詳しく述べる余裕がなくなりましたが、11

数理工学——「工学」諸問題を数理する！

藤重 悟 (京都大学数理解析研究所)

「数理工学」とは、端的に述べると、「工学」諸問題を数理する学問である。

---藤重悟

1. 数理工学とは

数理工学について語るには、その言葉の定義から始めなければならないが、数理工学に関わっている人たちの間で、はっきりとした共通の定義が了解されているとは言いがたいのが実情であろう。したがって、本小文で述べる「数理工学」はあくまでも私見に過ぎないことを始めにお断りしておきたい。

さて、私見であるが、「数理工学」とは、端的に述べると、「工学」諸問題を数理する学問である。

ここで、括弧付きの「工学」とは、(括弧付きの)「もの作り」である。ここで言う「もの作り」とは、従来の伝統的な工学の分野で対象としてきた物理的な実在としての物（たとえば、自動車、飛行機、建築物、電気製品、コンピュータ、道路、通信網など）の物作りは勿論、それらの物を動かし運用するシステム作りや設計・配置、さらには計画作り・スケジューリングなどの産業諸活動におけるソフトな「もの作り」を意味し、もっと広く企業・自治体や人間などの組織や個人の意思決定に関

私の数理工学

- I. 私の数理工学: 理論編
 - 良い研究をして、良い論文を書く
- II. 私の数理工学: 実践編
 - 使ってこそその数理工学
- III. 私の数理工学: 開拓編
 - 数理で工学を拓く

私の数理工学

□ 完璧サンプリング法

- ✓ 分割表 [RSA 2006]
- ✓ 待ち行列ネットワーク [SICOMP 2008, AOR 2008]

□ メディアン安定マッチング [MathOR 2012]

□ 確率と計算

- ✓ 決定性RW [RSA 2015, TCS 2017, SIDMA 2018]
- ✓ 高次元体積の決定性近似 [Algorithmica 2016, TCS 2020]

□ 対数優モジユラ分布

- ✓ 劣モジユラ関数の変数変換 [SIDMA 2020]
- ✓ 任意の有限分配束は $M^{\natural}$ 凹関数の最小化元族に同型 [OR lett. 2021]

□ 動的環境下のアルゴリズム論

- ✓ 増えるクーポン収集 [SODA 2021]

私の数理工学: 理論編 (研究宣伝)

□ 完璧サンプリング法

まとめると,

完璧サンプリング法で成果を得て,
分配束とか, 対数優モジユラ分布
に関係する話題に取り組んできた.

現在は, 理論計算機科学者として,
「**確率と計算**」の研究を推進.

. 2021]

□ 動的な最適化アルゴリズム

✓ 増えるクーポン収集 [SODA 2021]

「**計算**にランダムネスは必要か？」

私の数理工学: 開拓編

□ 完璧サンプリング法

- ✓ 分割表 [RSA 2006]
- ✓ 待ち行列ネットワーク [SICOMP 2008, AOR 2008]

□ メディアン安定マッチング [MathOR 2012]

□ 確率と計算

- ✓ 決定性RW [RSA 2015, TCS 2017, SIDMA 2018]
- ✓ 高次元体積の決定性近似 [Algorithmica 2016, TCS 2020]

□ 対数優モジユラ分布

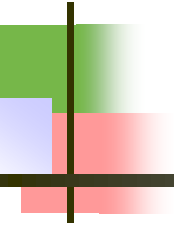
- ✓ 劣モジユラ関数の変数変換 [SIDMA 2020]
- ✓ 任意の有限分配束は $M^{\natural}$ 凹関数の最小化元族に同型 [OR lett. 2021]

□ 動的環境下のアルゴリズム論

- ✓ 増えるクーポン収集 [SODA 2021]

今日の話題

- (0. 春季大会講演ダイジェスト: 私の数理工学・広報版)
- I. 私の数理工学・技術編1: **確率過程**と乱択アルゴリズム (20分)
- II. 私の数理工学・技術編2: **数理計画**とゲーム理論 (20分)
- III. 私の数理工学・技術編3: **計算論**とフラクタル (5分)



増えるクーポン収集問題

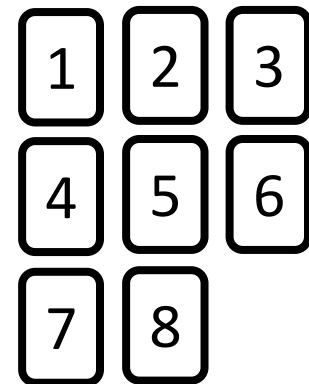
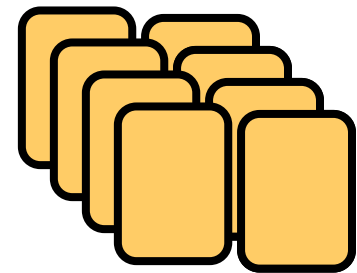
*来嶋秀治 (九大), 清水伸高(東大), 白髪丈晴 (中大)

S. Kijima, N. Shimizu and T. Shiraga,
**How many vertices does a random walk miss in a network
with moderately increasing the number of vertices?,**
Proc. **SODA** 2021, 106--122,

クーポン収集

- ビックリマンシール
- プロ野球チップス
- ガチャ

- P●KEM●Nカード100種類. コンプまでに何枚引けば良い？
- n 種類のカードが裏返しにおいてある. 1枚選んでめくり, 種類を確認したら元に戻して, よく混ぜる. 全ての種類を確認するまでに何回めくればよいか？
- 年賀状のお年玉くじ下2桁. 00から99までそろえるには年賀状を何枚もらえばよいか？
- 一万円札を千円札10枚に両替する. 千円札の記番号下2桁を00から99までそろえるには, いくら両替すればよいか？



クーポン収集

- ✓ $X_i \in \{1, \dots, n\}$ ($i = 1, 2, \dots$)は独立とし, $\Pr[X_i = k] = \frac{1}{n}$ ($k = 1, \dots, n$).
- ✓ $T = \min\{t \mid \{X_1, \dots, X_t\} = \{1, \dots, n\}\}$ を**コンプ回数(completion time)**と呼ぶ.

Q. $E[T]$ を求めよ.

$T_k := \min\{t \mid |\{X_1, \dots, X_t\}| = k\}$: k 種コンプ回数

$S_k := T_k - T_{k-1}$: $k - 1$ 種コンプしてから新種が出るまでの回数

Claim. $E[S_k] = \frac{n}{n-k+1}$.

✓ $k - 1$ 種コンプした状態で, 新種の出る確率 $p_k = \frac{n-(k-1)}{n}$.

✓ 従って $E[S_k] = \frac{1}{p_k} = \frac{n}{n-k+1}$ (幾何分布の期待値).

$T = T_n = \sum_{k=1}^n S_k$ に注意して,

$$E[T] = E[T_n] = \sum_{k=1}^n E[S_k] = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n-k+1} = n \sum_{k'=1}^n \frac{1}{k'} \simeq n(\ln n + 0.577)$$

$\simeq 519$ ($n = 100$ の時)

クーポン収集

- ✓ $X_i \in \{1, \dots, n\}$ ($i = 1, 2, \dots$)は独立とし, $\Pr[X_i = k] = \frac{1}{n}$ ($k = 1, \dots, n$).
- ✓ $T = \min\{t | \{X_1, \dots, X_t\} = \{1, \dots, n\}\}$ を**コンプ回数(completion time)**と呼ぶ.

Q. $E[T]$ を求めよ.

Q. $\Pr[T \geq 2n \ln n]$ はどれくらいか?

Chevyshevの不等式を使うと

$$\Pr[X \geq 2E[X]] \leq \frac{\text{Var}[X]}{E[X]^2} \leq \frac{\frac{n^2 \pi^2}{6}}{(n \ln n)^2} = \frac{\pi^2}{6(\ln n)^2}$$

$\simeq 0.078$ ($n = 100$ の時)

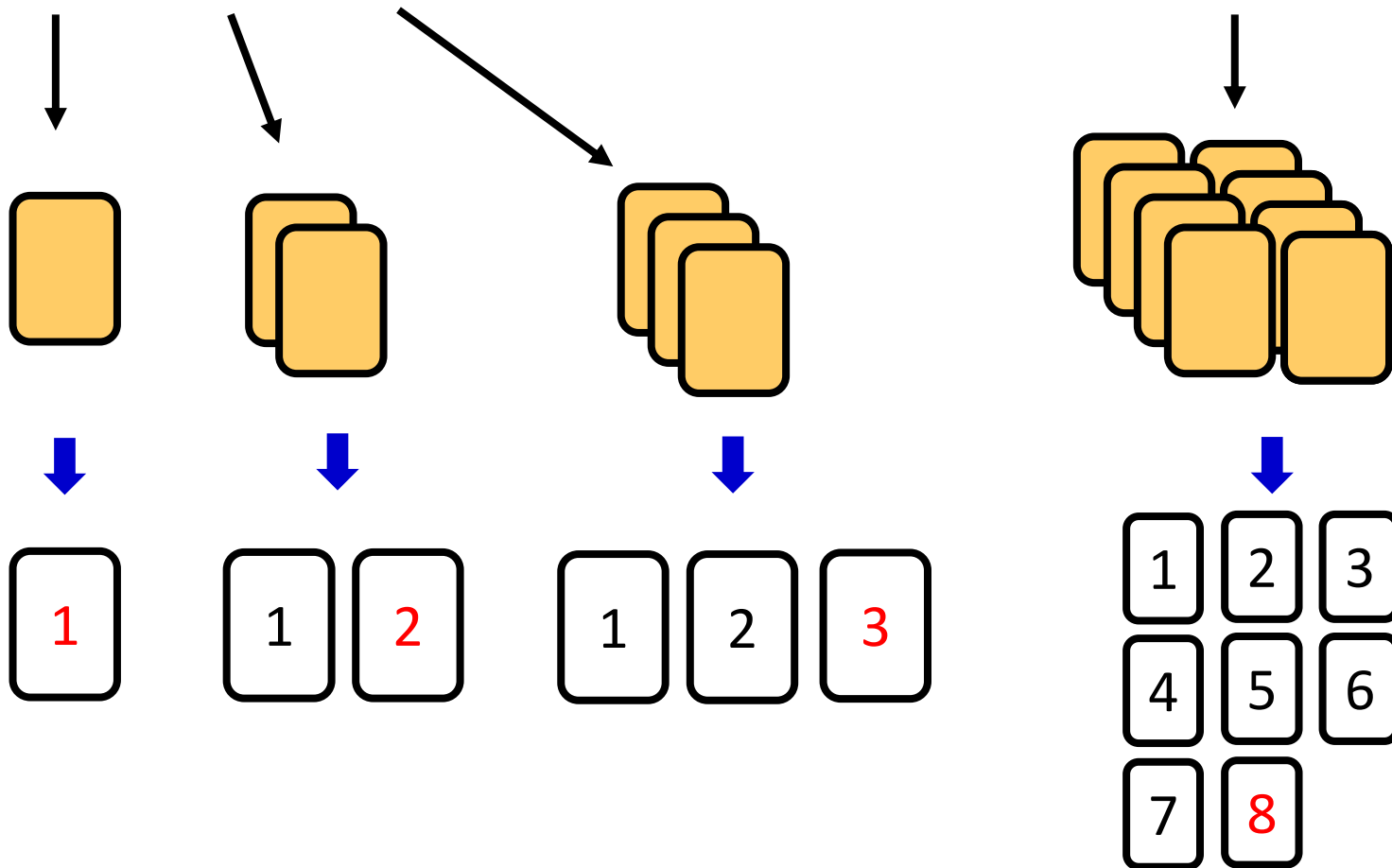
増えるクーポン収集

毎日1回ガチャを引く.

- 毎日1種ずつ増えるとき, コンブ回数は?

増えるクーポン収集

Day (i)	1日目	2日目	3日目	4日目	5日目	6日目	7日目	8日目	9日目
種類	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Pr[X_i = k]$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$



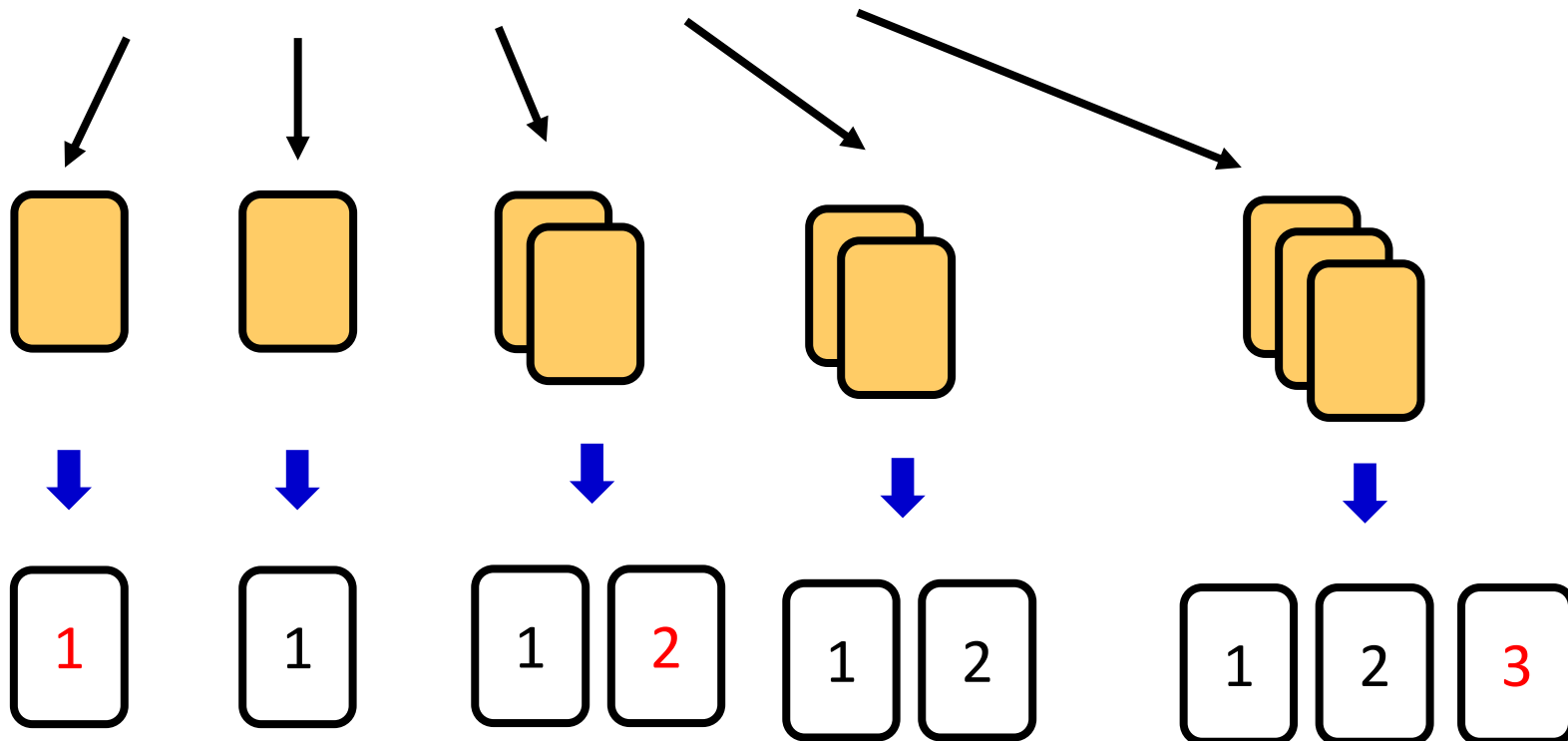
増えるクーポン収集

毎日1回ガチャを引く.

- 毎日1種ずつ増えるとき, コンプ回数は?
 - コンプ不可能
- 2日に1回新種リリースされたら, コンプ回数は?

増えるクーポン収集

Day	1日目	2日目	3日目	4日目	5日目	6日目	7日目	8日目	9日目
種類	1	1	2	2	3	3	4	4	5
$\Pr[X_i = k]$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$



増えるクーポン収集

毎日1回ガチャを引く.

- 毎日1種ずつ増えるとき, コンプ回数は?
 - コンプ不可能
- 2日に1回新種リリースされたら, コンプ回数は?
 - コンプ不可能
- 10日に1回リリースされたら?
 - コンプ不可能(種類数1000の時を考えてみよ)

ゆっくりと増えるクーポン収集

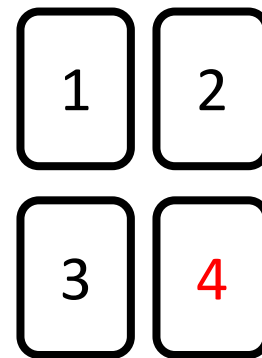
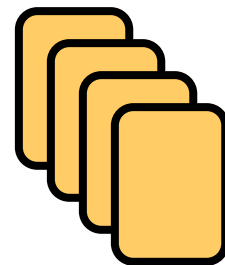
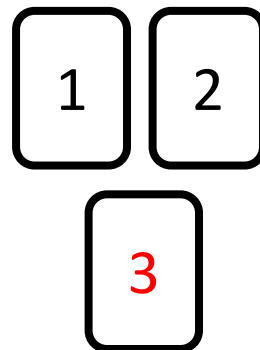
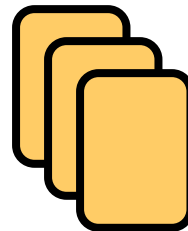
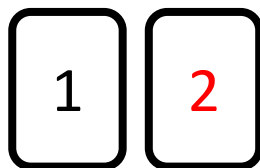
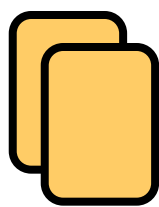
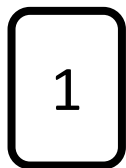
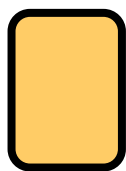
毎日1回ガチャを引く.

- n 種類目がリリースされて n 日後に新種がリリース.
 - Q. コンプ回数は？

ゆっくりと増えるクーポン収集

Day	1日目	2日目	3日目	4日目	5日目	6日目	7日目	8日目	9日目
種類	1	2	2	3	3	3	4	4	4
$\Pr[X_i = k]$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

1期 2期 3期 4期



ゆっくりと増えるクーポン収集

毎日1回ガチャを引く.

- n 種類目がリリースされて n 日後に新種がリリース.

➤ Q. コンブ回数は？

✓ A. コンブ不可能(新種は出続けるから)

➤ Q. n 期末にはどのくらいコンブされる？

1. $o(n)$

2. cn

3. $n - c\sqrt{n}$

4. $n - c \log n$

5. $n - c$

c は適当な定数

ゆっくりと増えるクーポン収集

命題

$\delta(n) = n$ のとき, $E[U_n] < 1$.

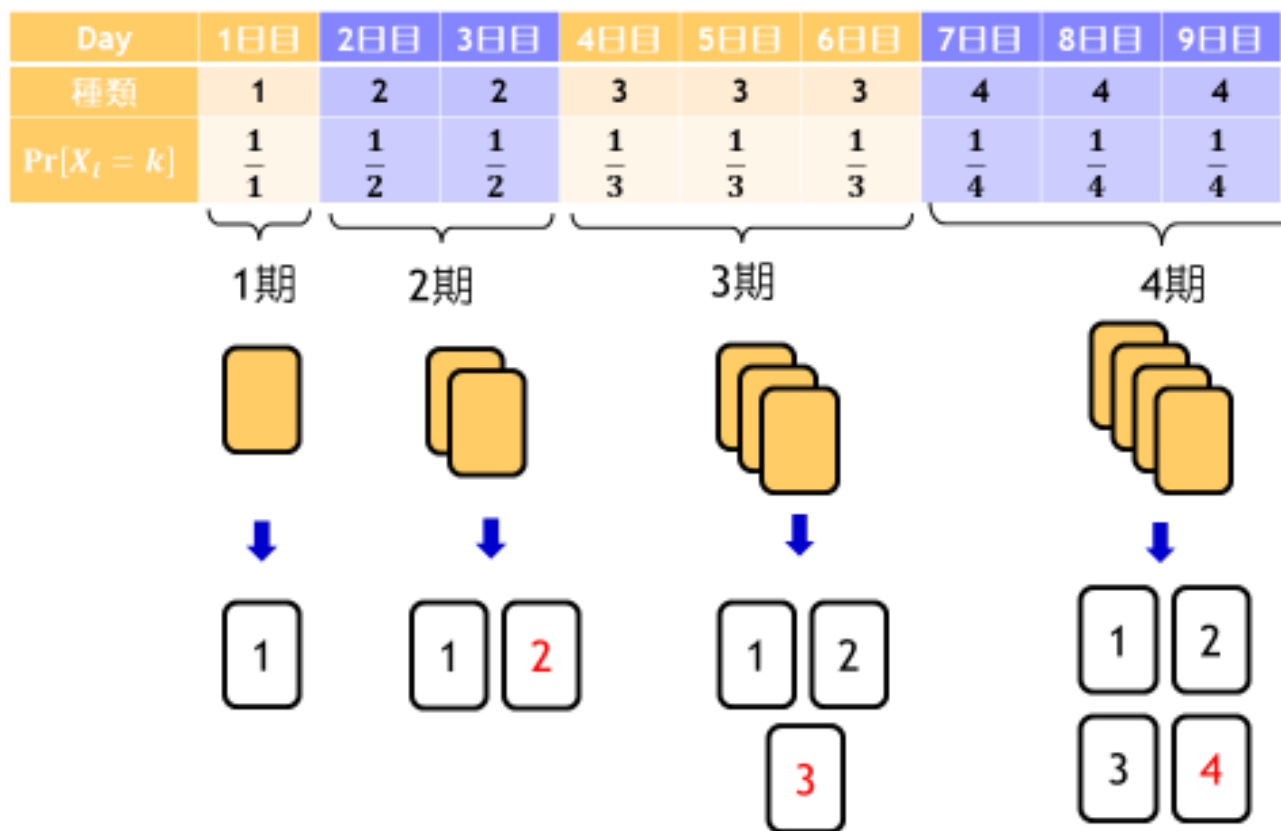
毎日1回ガチャを引く(一様ランダム)

$\delta(n)$: n 期の日数

U_n : n 期末の未収集アイテムの種類数

ゆっくりと増えるクーポン収集

25



ゆっくりと増えるクーポン収集

毎日1回ガチャを引く(一様ランダム)

$d(n)$: n 期の日数

U_n : n 期末の未収集アイテムの種類数

命題

$d(n) = n$ のとき, $E[U_n] < 1$.

証明

$$\checkmark \quad \varepsilon_{i,n} := \begin{cases} 1 & (n\text{期末にアイテム } i \text{ が未収集}) \\ 0 & (n\text{期末にアイテム } i \text{ が収集済み}) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\checkmark \quad U_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i,n}$$

✓ アイテム n が n 期末に未収集の確率

$$\Pr[\varepsilon_{n,n} = 1] = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < e^{-1}$$

✓ アイテム i ($i \leq n$) が n 期末に未収集の確率

$$\Pr[\varepsilon_{i,n} = 1] = \left(1 - \frac{1}{i}\right)^i \left(1 - \frac{1}{i+1}\right)^{i+1} \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1-i}$$

$$\checkmark \quad E[U_n] = \sum_{i=1}^n \Pr[\varepsilon_{i,n}] < \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1-i} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \cdots + \frac{1}{e^n} < \frac{\frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1} < 0.582$$

ゆっくりと増えるクーポン収集

毎日1回ガチャを引く(一様ランダム)

$d(n)$: n 期の日数

U_n : n 期末の未収集アイテムの種類数

命題

$$d(n) = \frac{n}{2} \text{ のとき, } E[U_n] < 2.$$

証明

$$\checkmark \quad \varepsilon_{i,n} := \begin{cases} 1 & (n\text{期末にアイテム } i \text{ が未収集}) \\ 0 & (n\text{期末にアイテム } i \text{ が収集済み}) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\checkmark \quad U_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i,n}$$

✓ アイテム n が n 期末に未収集の確率

$$\Pr[\varepsilon_{n,n} = 1] = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} < e^{-\frac{1}{2}}$$

✓ アイテム i ($i \leq n$) が n 期末に未収集の確率

$$\Pr[\varepsilon_{i,n} = 1] = \left(1 - \frac{1}{i}\right)^{\frac{i}{2}} \left(1 - \frac{1}{i+1}\right)^{\frac{i+1}{2}} \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} < \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{n+1-i}{2}}$$

$$\checkmark \quad E[U_n] = \sum_{i=1}^n \Pr[\varepsilon_{i,n}] < \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{n+1-i}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}} + \frac{1}{\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}} + \cdots + \frac{1}{\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}} < \frac{\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}}{1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} - 1} < 1.542$$

ゆっくりと増えるクーポン収集

毎日1回ガチャを引く(一様ランダム)

$d(n)$: n 期の日数

U_n : n 期末の未収集アイテムの種類数

命題

$$d(n) = cn \text{ のとき, } E[U_n] < \frac{1}{e^c - 1}.$$

証明

✓ アイテム i ($i \leq n$) が n 期末に未収集の確率

$$\Pr[\mathcal{E}_{i,n} = 1] = \left(1 - \frac{1}{i}\right)^{ci} \left(1 - \frac{1}{i+1}\right)^{c(i+1)} \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{cn} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{c(n+1-i)}$$

$$\begin{aligned} \text{✓ } E[U_n] &= \sum_{i=1}^n \Pr[\mathcal{E}_{i,n}] \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{e}\right)^{c(n+1-i)} = \frac{1}{e^c} + \frac{1}{e^{2c}} + \cdots + \frac{1}{e^{nc}} < \frac{\frac{1}{e^c}}{1 - \frac{1}{e^c}} = \frac{1}{e^c - 1} \end{aligned}$$

ゆっくりと増えるクーポン下界

毎日1回ガチャを引く(一様ランダム)

$d(n)$: n 期の日数

U_n : n 期末の未収集アイテムの種類数

命題

$$d(n) = cn \text{ のとき, } E[U_n] \geq \frac{n}{cn+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{cn} \simeq \frac{1}{ce^c}.$$

証明

$$\checkmark S(n) := \sum_{k=1}^n \prod_{i=k}^n \left(1 - \frac{1}{i}\right)^{ci} \quad (= E[U_n])$$

$$\checkmark \text{ Proposition } S(n) \geq \frac{n}{cn+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{cn}.$$

- Claim 1: $S(n+1) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{c(n+1)} (S(n) + 1).$
- Claim 2: $S(n) \geq \frac{n}{cn+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{cn} \Rightarrow S(n) + 1 \geq \frac{n+1}{c(n+1)+1}.$
- 帰納法として,

$$\begin{aligned} S(n+1) &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{c(n+1)} (S(n) + 1) \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{c(n+1)} \frac{n+1}{c(n+1)+1} \end{aligned}$$

ゆっくりと増えるクーポン下界

毎日1回ガチャを引く(一様ランダム)

$d(n)$: n 期の日数

U_n : n 期末の未収集アイテムの種類数

命題

$$d(n) = cn \text{ のとき, } E[U_n] \geq \frac{n}{cn+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{cn} \simeq \frac{1}{ce^c}.$$

証明

$$\checkmark S(n) := \sum_{k=1}^n \prod_{i=k}^n \left(1 - \frac{1}{i}\right)^{ci} \quad (= E[U_n])$$

$$\checkmark \text{ Proposition } S(n) \geq \frac{n}{cn+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{cn}.$$

- Claim 1: $S(n+1) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{c(n+1)} (S(n) + 1).$
- Claim 2: $S(n) \geq \frac{n}{cn+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{cn} \Rightarrow S(n) + 1 \geq \frac{n+1}{c(n+1)+1}.$
- 帰納法として,

$$\begin{aligned} S(n+1) &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{c(n+1)} (S(n) + 1) \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{c(n+1)} \frac{n+1}{c(n+1)+1} \end{aligned}$$

ゆっくりと増えるクーポン収集

補題(S_n の性質)

$$\mathfrak{d}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, S(n) := \sum_{k=1}^n \prod_{i=k}^n \left(1 - \frac{1}{i}\right)^{\mathfrak{d}(i)}$$

(i) $\mathfrak{d}(i) \geq ci$ のとき, $S(n) = O(1)$.

(ii) $\mathfrak{d}$ が単調非減少($\mathfrak{d}(i) \leq \mathfrak{d}(i+1)$)のとき,

$$S(n) \geq \frac{n}{\mathfrak{d}(n)+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\mathfrak{d}(n)}.$$

(iii) $\mathfrak{d}$ が劣線形($\frac{\mathfrak{d}(i)}{i} \geq \frac{\mathfrak{d}(i+1)}{i+1}$)のとき, $S(n) \leq \frac{n}{\mathfrak{d}(n)}$.

(iv) $\mathfrak{d}(i) = c$ (定数)のとき, $S(n) \leq \frac{n}{c+1}$.

増えるクーポン収集

毎日1回ガチャを引く(一様ランダム)

$\mathfrak{d}(n)$: n 期の日数

U_n : n 期末の未収集アイテムの種類数

定理

$\mathfrak{d}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

(i) $\mathfrak{d}(i) \geq ci$ のとき, $E[U_n] = O(1)$.

• とくに $\frac{\mathfrak{d}(i)}{i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$ のとき, $E[U_n] = 0$.

(ii) $\mathfrak{d}$ が単調非減少で非有界かつ劣線形($\frac{\mathfrak{d}(i)}{i} \geq \frac{\mathfrak{d}(i+1)}{i+1}$)のとき,

$$E[U_n] = (1 - o(1)) \frac{n}{\mathfrak{d}(n)+1}.$$

(iii) $\mathfrak{d}(i) = c$ (定数)のとき,

$$E[U_n] = \left(1 - O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \frac{n}{c+1}.$$

$\mathfrak{d}(i) = o(i)$ の時, $E[U_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.
(e.g., $\mathfrak{d}(i) = \lfloor \sqrt{i} \rfloor$,
 $\mathfrak{d}(i) = \lfloor \log i \rfloor$ etc.)

クーポン収集から有限グラフ上のランダムウォークへ

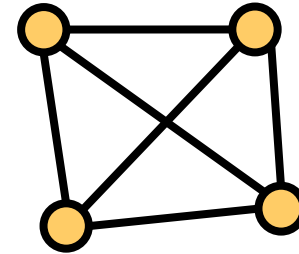
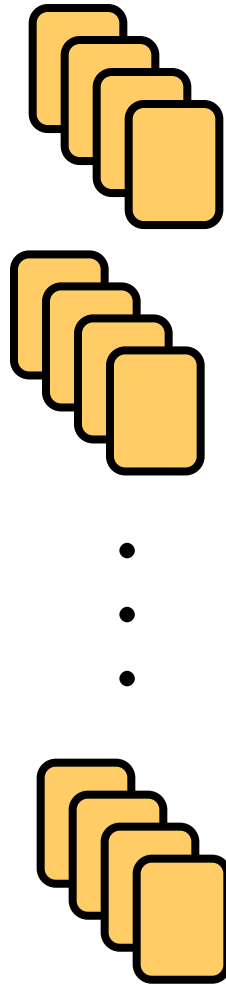


How Many Vertices Does a Random Walk Miss in a Network
with a Moderately Increasing Number of Vertices?

*来嶋秀治 (九大), 清水伸高(東大), 白髪丈晴 (中大)

*本研究はJSPS科研費 JP17K19982の助成を受けたものです。

(通常の)クーポン収集と完全グラフ上のランダムウォーク



クーポンのcompletion time = 完全グラフ上のRWのcover time

頂点の増えるグラフ上のランダムウォーク

RWoGG: $\left(\mathfrak{d}, (G^{(i)})_{i=1}^{\infty}, (P^{(i)})_{i=1}^{\infty} \right)$

定理(一般上界)

$\mathfrak{d}(i) \geq ct_{\text{hit}}(i)$ ($c \geq 1$)のとき, $E[U] = O(1)$.

さらに $\frac{\mathfrak{d}(i)}{t_{\text{hit}}(i)} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$ なら, $E[U_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

定理(lazy reversible)

$P^{(i)}$ は lazy reversible とする.

$\frac{t_{\text{hit}}(i)}{t_{\text{mix}}(i)} \geq \frac{i^\gamma}{c}$ かつ $\mathfrak{d}(i) \geq \frac{3ct_{\text{hit}}(i)}{i^\gamma}$ ($c > 0$) のとき, $E[U_n] \leq \frac{8n^\gamma}{c} + 32$.

S. Kijima, N. Shimizu, T. Shiraga, How many vertices does a random walk miss in a network with moderately increasing the number of vertices?, in Proc. SODA 2021, 106–122.

まとめ

参入お待ち
しています.

✓ 増えるクーポン収集問題

- ✓ 頂点がゆっくり増加するグラフ上のRWの非被覆具合
 - 期間 δ と未訪問数 $E[U_n]$ の関係

今後の課題

- ✓ $E[U_n] = O(1)$ の必要条件: $\delta(i) = ? \Omega(t_{\text{hit}}(i))$
- ✓ “Cover time”以外の指標
- ✓ ランダムウォークからアルゴリズムへ

□ 「動的環境下のアルゴリズム解析」

- とは? “入力”が静的でない???

計算機科学では「問題」は「入力」と「質問」からなる:

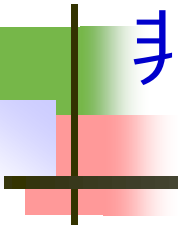
例: 素数判定問題

入力: $z \in \mathbb{N}$

質問: z は素数か?

今日の話題

- (0. 春季大会講演ダイジェスト: 私の数理工学・広報編)
 - I. 私の数理工学・技術編1: **確率過程**と乱択アルゴリズム (20分)
 - II. 私の数理工学・技術編2: **数理計画**とゲーム理論 (20分)
 - III. 私の数理工学・技術編3: **計算論**とフラクタル (5分)



非推移的サイコロのはなし

盧 尚, *来嶋 秀治

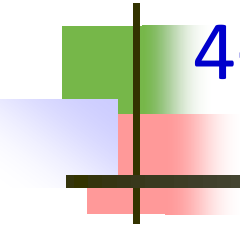
九州大学 大学院システム情報科学府

Shang Lu and Shuji Kijima,

Is There a Strongest Die in a Set of Dice with the Same Mean Pips,
Proc. **AAAI 2022**.

本発表の概要

- 小松と小野によれば、相異なる手には引き分けのない偶数手のジャンケンには**ゲーム論的に無駄な手**が必ず存在する。
- ジャンケンは勝敗が**決定的**に定まるゲームのモデルである。一方、現実世界において、勝敗は往々にして**確率的**である。本研究では勝敗が確率的に定まるゲームの素朴なモデルとして、**非推移的サイコロ**について議論する。
- ある種の公平性の条件をおき、サイコロ構築問題を考える。**最強のサイコロ**が存在するか否かを調べる？



4手ジャンケン

来嶋 秀治 (Shuji Kijima)

Dept. Informatics,
Graduate School of ISEE

ジャンケン

		Bob		
		グー	チョキ	パー
Alice	グー	--	A	B
	チョキ	B	--	A
	パー	A	B	--

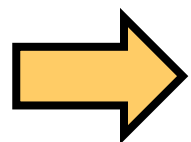
どの手を出すか?

4手ジャンケン ver.2

		Bob			
		グー	チョキ	パー	いいね!
Alice	グー	--	A	B	B
	チョキ	B	--	A	B
	パー	A	B	--	A
	いいね!	A	A	B	--

どの手を出すか?

グー出すくらいなら、いいね!を出す。



グーはいらない(無駄な手).



<https://ja.wikipedia.org/wiki/いいね!ボタン>

Q.意味のある4手ジャンケン？

無駄な手のない4手ジャンケン

無駄な手のない5手ジャンケン（2チーム）

ディスカッション5分

定理

4手ジャンケンには必ず無駄な手ができる.

ただし, 異なる手の間には“あいこ”はないものとする.

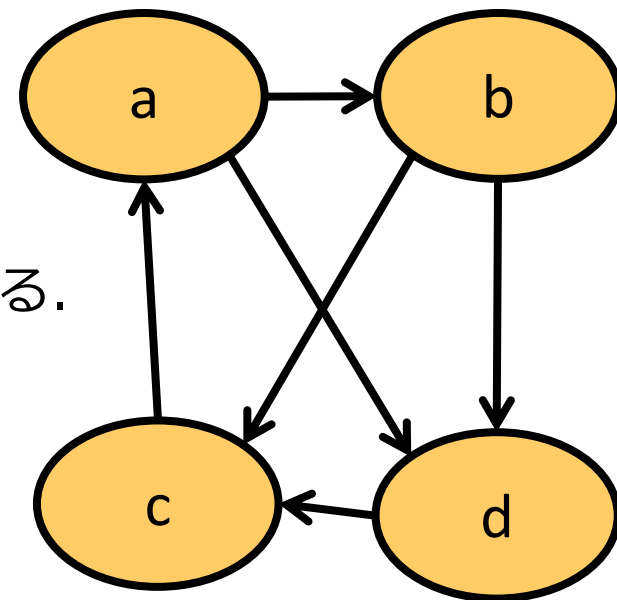
証明

補題1. 「2手が出次数2, それ以外の2手は出次数1」 以外は有効でない.

- ✓ 出次数3があると, それ以外の手は無駄.
- ✓ 出次数0の手は無駄.
- ✓ 2項関係は全6種類より, 主張のパターンしか存在しない.

補題2. 補題1のパターンのグラフは同型.

- ✓ a,b: 出次数2, c,d: 出次数1
- ✓ a,bは一方が他方に勝つ
⇒ 一般性を失うことなく. $a \rightarrow b$ とする.
- ✓ bはc,d,に勝つ.
- ✓ aは出次数2なのでc,dにどちらか一方に負ける.
⇒ 一般性を失うことなく. $c \rightarrow a$ とする.

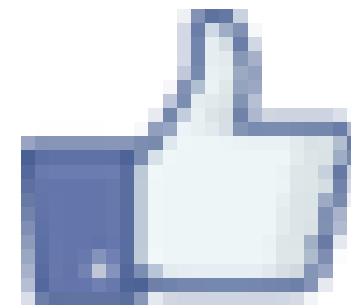
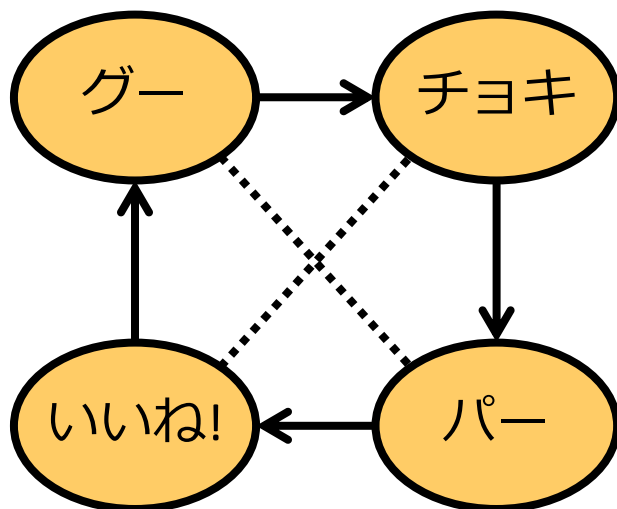


補題3. dは無駄手

dを出すくらいならbを出す

異なる手のあいこを許すと、有効な4手ジャンケンが存在する

		Bob			
		グー	チョキ	パー	いいね!
Alice	グー	--	A	--	B
	チョキ	B	--	A	--
	パー	--	B	--	A
	いいね!	A	--	B	--



<https://ja.wikipedia.org/wiki/いいね!ボタン>

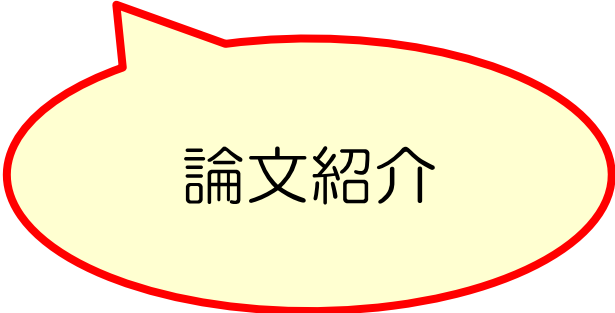
関連する講義

- 線形代数
- (微分積分学)
- 確率統計 (3前)
- 離散数学 (3前)
- ゲーム理論 (4)
 - ✓ 2人ゼロ和ゲーム
- 数理計画法 (3後)
- ...

一般化ジャンケンに対するゲーム理論的解析

小松, 秀平
九州大学経済学部経済工学科

小野, 廣隆
九州大学大学院経済学研究院経済工学部門



論文紹介

本発表の概要

- 小松と小野によれば、相異なる手には引き分けのない偶数手のジャンケンには**ゲーム論的に無駄な手**が必ず存在する。

戦略的に無駄な手

「小松 秀平, 小野 廣隆, **一般化ジャンケンに対するゲーム理論的解釈**, 九州大学学術情報リポジトリ, 2015.」より,
定理9を話者翻案.

□ **n 手ジャンケン**: 利得行列 $A \in \{-1, 0, 1\}^{n \times n}$ s.t. A は**歪対称**.

➤ **明確ジャンケン**: A の非対角が非ゼロ□

➤ **手**: $i \in \{1, \dots, n\}$

$$A^T = -A$$

例: 異なる手のあいこを許すと,
有効な4手ジャンケンが存在する

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bob

		グー	チョキ	パー	いいね!
Alice	グー	--	A	--	B
	チョキ	B	--	A	--
	パー	--	B	--	A
	いいね!	A	--	B	--

戦略的に無駄な手

「小松 秀平, 小野 廣隆, **一般化ジャンケンに対するゲーム理論的解釈**, 九州大学学術情報リポジトリ, 2015.」より,
定理9を話者翻案.

□ **n 手ジャンケン**: 利得行列 $A \in \{-1, 0, 1\}^{n \times n}$ s.t. A は**歪対称**.

➤ **明確ジャンケン**: A の非対角が非ゼロ

➤ **手**: $i \in \{1, \dots, n\}$

$$A^T = -A$$

□ i が (x において) **戦略的に無駄な手**: $x \in \mathcal{N}_A, x_i = 0$.

□ i が **全戦略的に無駄な手**: $\forall x \in \mathcal{N}_A, x_i = 0$.

□ ジャンケン A が **戦略効率的**: 全戦略的に無駄な手が存在しない.

ゲーム理論一般用語

□ 混合戦略 (または単に **戦略**): $x \in \mathbb{R}^n$ s.t. $\|x\|_1 = 1, x \geq 0$

➤ **命題**: 自分 x , 相手 y のとき, 自分の期待利得は $x^T A y$.

□ **Nash均衡**: $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ s.t. $x^{*\top} A y^* = \max_x \min_y x^T A y$

➤ 単に x^* を **Nash均衡戦略** と呼ぶ

➤ $\mathcal{N}_A$: A の Nash均衡戦略全体の集合

➤ **完全混合 Nash戦略**: $x \in \mathcal{N}_A, x > 0$.

戦略的に無駄な手

「小松 秀平, 小野 廣隆, **一般化ジャンケンに対するゲーム理論的解釈**, 九州大学学術情報リポジトリ, 2015.」より,
定理9を話者翻案.

定理1 [小松, 小野 15]

偶数手の**明確**ジャンケンには**全戦略的に無駄な手**が存在する.

定理2 [小松, 小野 15]

奇数手の**明確**ジャンケンが戦略効率的な時,
Nash均衡戦略は一意.

証明の背景知識

- 2人ゼロ和ゲームの**Nash均衡戦略**は**線形計画問題**の最適解
- 線形計画の**双対定理**(弱双対の証明)

ジャンケンの混合Nashを求める線形計画法

「小松 秀平, 小野 廣隆, **一般化ジャンケンに対するゲーム理論的解釈**, 九州大学学術情報リポジトリ, 2015.」より,
定理9を話者翻案.

線形計画 P

$$\begin{aligned} \max. \quad & z \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i - z \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Recall

A: 利得行列

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i \text{ wins } j \\ -1 & j \text{ wins } i \\ 0 & i = j \end{cases}$$

線形計画 P (行列形式)

$$\begin{aligned} \max. \quad & z \\ \text{s. t.} \quad & (A^T, -\mathbf{1}) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

2人**ゼロ和**ゲームの性質

戦略的に無駄な手

「小松 秀平, 小野 廣隆, 一般化ジャンケンに対するゲーム理論的解釈, 九州大学学術情報リポジトリ, 2015.」より, 定理9を話者翻案.

定理1 [小松, 小野 15]

偶数手の**明確**ジャンケンには**全**戦略的に無駄な手が存在する.

定理2 [小松, 小野 15]

奇数手の**明確**ジャンケンが戦略効率的な時,
Nash均衡戦略は一意.

補題1.

A に**全略的に無駄な手**が存在**しない** $\Leftrightarrow A$ に**完全Nash均衡**が存在

補題2.

(P)が**正の**最適解 x^* を持つ

$\Leftrightarrow A'x = b$ は解をもつ. また x^* はその解の一つ.

$\Leftrightarrow A$ に**完全Nash均衡**が存在

2人ゼロ和ゲームの混合Nash均衡の凸性

「小松 秀平, 小野 廣隆, 一般化ジャンケンに対するゲーム理論的解釈, 九州大学学術情報リポジトリ, 2015.」より, 定理9を話者翻案.

補題1.

A に**全略的に無駄な手**が存在**しない** $\Leftrightarrow A$ に**完全Nash均衡**が存在

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \exists x \in \mathcal{N}_A, x_i > 0$$

$$\exists x \in \mathcal{N}_A, \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i > 0$$

背景知識

証明

($\Leftarrow$) 自明.

($\Rightarrow$)

- 手 i に対する前提の解を $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ とする.

➤ つまり, $x_i^{(i)} \in \mathcal{N}_A, x_i^{(i)} > 0$.

- $x^* = \frac{\sum_{i=1}^n x^{(i)}}{n}$ とすると, $x^* \in \mathcal{N}_A, x_i^* > 0$ を満たす.

線形計画問題の
最適解集合の凸性

対称ゲームの性質(多分)

$$A' = \begin{pmatrix} & & -1 \\ & A^\top & \vdots \\ & & -1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[後で重要]

A' は**歪対称**

➤ つまり $A'^\top = -A'$

補題2.

線形計画問題(P)が**正の最適解** $\mathbf{x}^* > \mathbf{0}$ を持つ

$\Leftrightarrow A'\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は解をもつ. また $\mathbf{x}^*$ はその解の一つ.

Recall: 線形計画 P (行列形式)

max. z

s. t. $(A^\top, -\mathbf{1}) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$

$\mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1$

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

対称ゲームの性質(多分)

$$A' = \begin{pmatrix} & & -1 \\ & A^\top & \vdots \\ & & -1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ z \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[後で重要]

A' は**歪対称**

➤ つまり $A'^\top = -A'$

補題2.

線形計画問題(P)が**正の最適解** $x^* > 0$ を持つ

$\Leftrightarrow A'x = b$ は解をもつ. また x^* はその解の一つ.

証明

(P') max. $b^\top x$ s.t. $A'x \geq b, x \geq 0$

(D') min. $b^\top y$ s.t. $A'^\top y \leq b, y \geq 0$

x^*, y^* を最適解とする, 強双対より $b^\top x^* = b^\top y^*$.

弱双対定理の証明をなぞると,

$$\begin{aligned} 0 &= b^\top x^* - b^\top y^* \geq (A'^\top y^*)^\top x^* - y^{*\top} b \\ &= y^{*\top} (A'x^*) - y^{*\top} b = y^{*\top} (A'x^* - b) \geq 0 \end{aligned}$$

つまり, $y^{*\top} (A'x^* - b) = 0$. したがって, $y^* > 0$ ならば $A'x^* = b$.

*話者翻案: 本当は要注意
(元論文は注意深く書かれてる.)

相補スラック条件

定理1の証明

定理1

偶数手の**明確**ジャンケンには**全**戦略的に無駄な手が存在する.

証明

$$A' = \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & A^\top & & \vdots \\ & & & -1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ z \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[後で重要]
A'は**歪対称**

$$\triangleright A'^\top = -A'$$

□ 補題1,2から, $A'x = b$ が解をもたないことを示せば十分.

- A' は奇×奇行列かつ歪対称 $\Rightarrow A'$ は非正則 ($\text{rank}(A') < n+1$).
✓ ($\det A' = \det A'^\top = \det(-A')$ より)
- 一方で, A は**歪対称で非対角が非ゼロ**から, $\text{rank}(A) = n$ がいえる.
- したがって, A' と b の定義を考えると, $\text{rank}(A', b) = n+1$.
- つまり $\text{rank}(A', b) \neq \text{rank}(A') \Rightarrow [A'x = b \text{は解をもたない}]$.

補題 [McCarthy&Benjamin 96]

$m \times m$ 行列 M トーナメントの接続行列(=歪対称, **非対角が非ゼロ**)とすると,

$$\text{rank}(M) = \begin{cases} m & m \text{ 偶数} \\ m-1 & m \text{ 奇数} \end{cases}$$

Clifford A. McCarthy and Arthur T. Benjamin, Determinants of the tournaments, Mathematics Magazine, 133—135, 1996.

定理2の証明

定理2

奇数手の**明確**ジャンケンが戦略効率的な時,
Nash均衡戦略は一意.

$$A' = \begin{pmatrix} & A^\top & \begin{matrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{matrix} \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ z \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[後で重要]
 A' は**歪対称**
➤ $A'^\top = -A'$

証明

- A' は**歪対称**で**非対角が非ゼロ**から, $\text{rank}(A') = n + 1$ がいえる.
- したがって, $A'x = b$ は一意の解をもつ.

補題 [McCarthy&Benjamin 96]

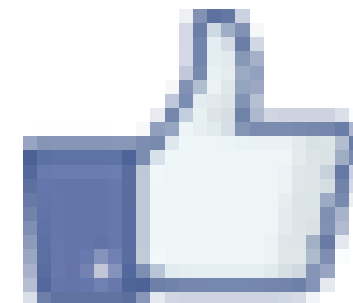
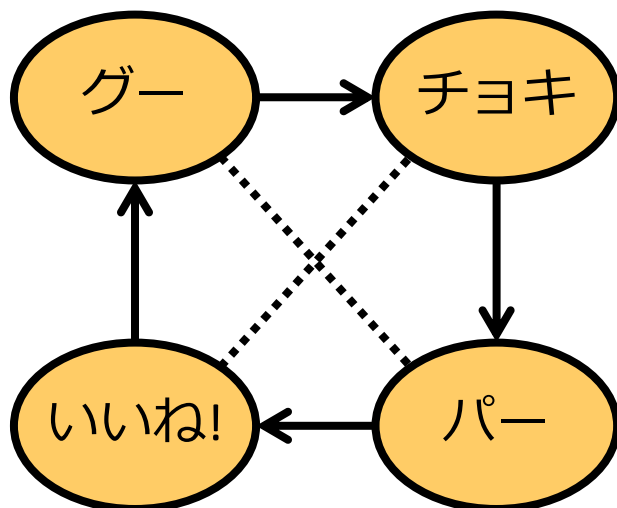
$m \times m$ 行列 M トーナメントの接続行列(=歪対称, **非対角が非ゼロ**)とすると,

$$\text{rank}(M) = \begin{cases} m & m \text{ 偶数} \\ m-1 & m \text{ 奇数} \end{cases}$$

Clifford A. McCarthy and Arthur T. Benjamin, Determinants of the tournaments, Mathematics Magazine, 133—135, 1996.

異なる手のあいこを許すと、有効な4手ジャンケンが存在する

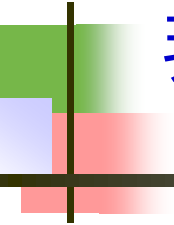
		Bob			
		グー	チョキ	パー	いいね!
Alice	グー	--	A	--	B
	チョキ	B	--	A	--
	パー	--	B	--	A
	いいね!	A	--	B	--



<https://ja.wikipedia.org/wiki/いいね!ボタン>

本発表の概要

- 小松と小野によれば、相異なる手には引き分けのない偶数手のジャンケンには**ゲーム論的に無駄な手**が必ず存在する。
- **ジャンケン**は勝敗が**決定的**に定まるゲームのモデルである。一方、現実世界において、勝敗は往々にして**確率的**である。本研究では勝敗が確率的に定まるゲームの素朴なモデルとして、**非推移的サイコロ**について議論する。
- ある種の公平性の条件をおき、サイコロ構築問題を考える。**最強のサイコロ**が存在するか否かを調べる？



非推移的サイコロのはなし

Efron's dice

$A = (0, 0, 4, 4, 4, 4)$

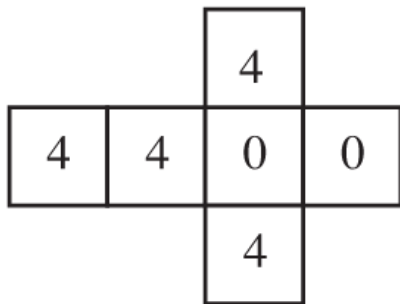
$B = (3, 3, 3, 3, 3, 3)$

$C = (2, 2, 2, 2, 6, 6)$

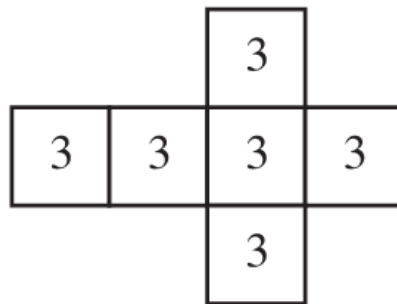
$D = (1, 1, 1, 5, 5, 5)$

die 1

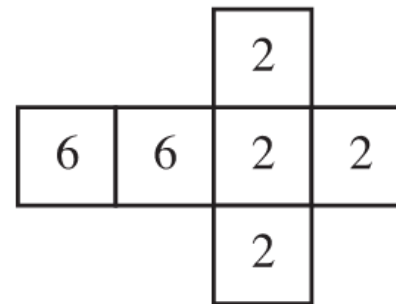
A



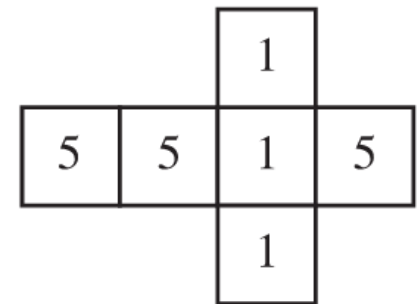
B



C



D



<https://mathworld.wolfram.com/EfronsDice.html>

Efron's dice

A = (0, 0, 4, 4, 4, 4)

B = (3, 3, 3, 3, 3, 3)

C = (2, 2, 2, 2, 6, 6)

D = (1, 1, 1, 5, 5, 5)

A/B	3	3	3	3	3	3
0						
0						
4						
4						
4						
4						

$$\Pr[X_A > X_B] = \frac{2}{3}$$

B/C	2	2	2	2	6	6
3						
3						
3						
3						
3						
3						

$$\Pr[X_B > X_C] = \frac{2}{3}$$

$$A > B > C > D > A$$

⇒ **非推移的**サイコロ (intransitive dice)

C/D	1	1	1	5	5	5
2						
2						
6						
6						
6						

$$\Pr[X_C > X_D] = \frac{2}{3}$$

D/A	0	0	4	4	4	4
1						
5						
5						
5						
5						

$$\Pr[X_D > X_A] = \frac{2}{3}$$

Efron's dice

A = (0, 0, 4, 4, 4, 4)

B = (3, 3, 3, 3, 3, 3)

C = (2, 2, 2, 2, 6, 6)

D = (1, 1, 1, 5, 5, 5)

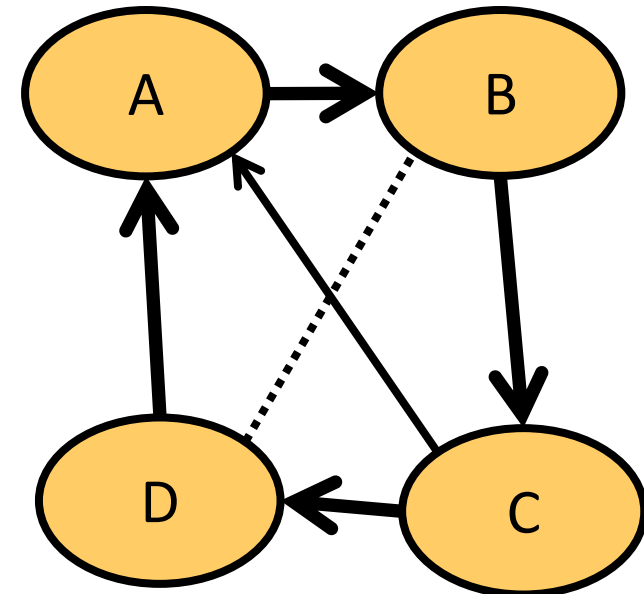
A/C	2	2	2	2	6	6
0						
0						
4						
4						
4						
4						

$$\Pr[X_A > X_C] = \frac{4}{9}$$

B/D	1	1	1	5	5	5
3						
3						
3						
3						
3						
3						

$$\Pr[X_B > X_D] = \frac{1}{2}$$

4つとも、戦略的に有効?



Efron's diceのNash均衡戦略

VOL. 74, NO. 3, JUNE 2001

215

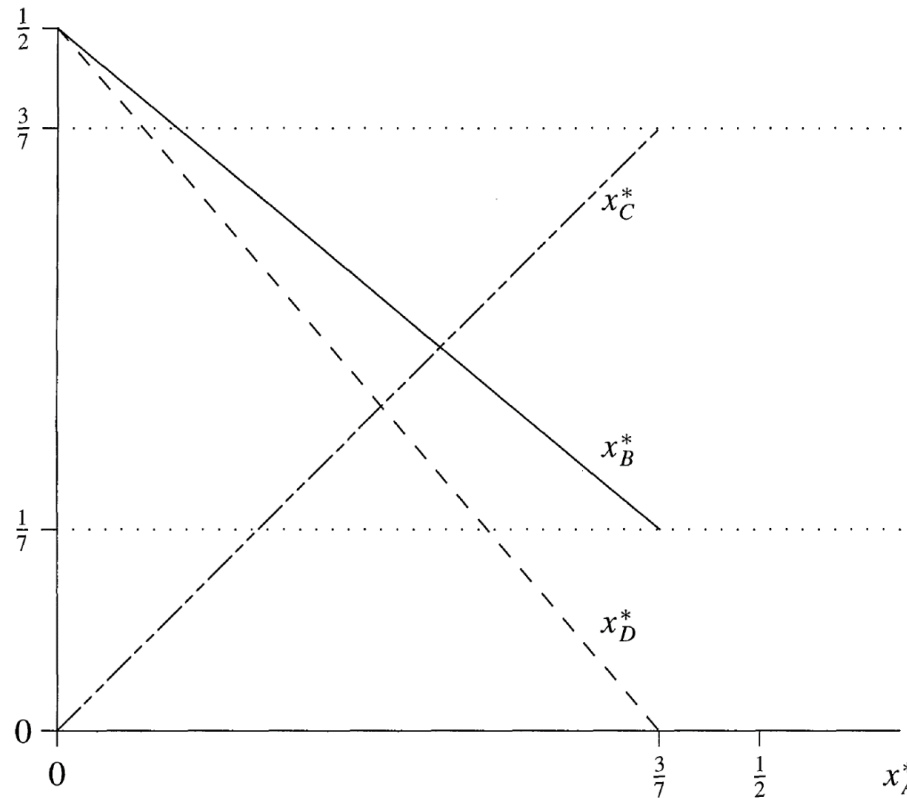


Figure 2 Optimal strategy solutions

C. Rump, Strategies for rolling the Efron dice, Mathematics Magazine, 74 (3): 212 - 216, 2001.

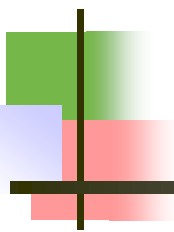
非推移的サイコロのNash均衡

盧尚, 来嶋秀治, 四つ組の非推移的サイコロの混合戦略,
第178回アルゴリズム研究会 (AL177振替), オンライン,
令和2年5月9日.

- ✓ 任意の3個組の非推移的サイコロのNash均衡戦略は？
⇒ 一意に求まる.
- ✓ 任意の4個組の非推移的サイコロは**全戦略的に無駄なサイコロ**を含むか？
⇒ 含む時も, 含まない時もある.

特徴付けが今後の課題.

良い定理は何度でも発見される。
---山下雅史



Irving Kaplanskyの定理 (1945, 1995)

- Irving Kaplansky, A contribution to von Neumann's theory of games, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 46, No. 3 (Jul., 1945), pp. 474-479.
- Irving Kaplansky, A contribution to von Neumann's theory of games. II, Linear Algebra and its Applications, Vol. 226–228 (Sep.-Oct. 1995), pp. 371-373.

I. Kaplansky, A contribution to von Neumann's theory of games, *Annals of Mathematics, Second Series*, Vol. 46, No. 3 (Jul., 1945), pp. 474-479.

$$(0 \quad | \quad G_k)$$

Here $v'(G) = 0$ unless the $v'(G_i)$ have the same sign, in which case

$$\frac{1}{v'(G)} = \frac{1}{v'(G_1)} + \frac{1}{v'(G_2)} + \cdots + \frac{1}{v'(G_k)}.$$

(d) *Symmetric games.* The game G is symmetric if and only if its matrix is skew-symmetric. Of course $v'(G) = 0$, so the only interest lies in locating good strategies. Since the rank of a skew-symmetric matrix is even, we have the curious fact that an n by n symmetric game can be completely mixed only if n is odd.

For $n = 3$, the game

$$\begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

is completely mixed if and only if a, b, c are different from zero and have the same sign. The unique good strategy is then $(a/(a + b + c), b/(a + b + c), c/(a + b + c))$. (This is a sort of generalization of "Stone, Paper and Scissors").⁴

The symmetric game $\|a_{ij}\|$ of order 5 is completely mixed if and only if the five expressions

$$\begin{aligned} & a_{25}a_{34} - a_{35}a_{24} + a_{45}a_{23} \\ & - a_{15}a_{34} + a_{35}a_{14} - a_{45}a_{13} \\ & a_{15}a_{24} - a_{25}a_{14} + a_{45}a_{12} \\ & - a_{15}a_{23} + a_{25}a_{13} - a_{35}a_{12} \\ & a_{14}a_{23} - a_{24}a_{13} + a_{34}a_{12} \end{aligned}$$

have the same sign and the unique good strategy is then proportional to them.

観察 [Kaplanski 45]

A は $n \times n$ 歪対称行列とする. n が **偶数** のとき,
対称ゲーム A は完全混合 Nash をもたない.

系 ([Kaplanski 45] + [小松, 小野15; 補題1])

偶数 手の **明確対称ゲーム** には **全戦略的に無駄な手** が存在する.

定理 [Kaplanski 95 ($n \leq 5$ は 1945 年)]

A は $n \times n$ 歪対称行列とし, n は **奇数** とする.

A が **完全混合 Nash 均衡戦略** をもつ

$\Leftrightarrow A$ の **i 番目の principle Pfaffian** p_i が $x_i^* := (-1)^{i-1} p_i > 0$ を満たす.

Nash 均衡戦略は一意に定まり, $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$.

i 番目の Principle Pfaffian: A の i 行と i 列を除いた

$(n-1) \times (n-1)$ 行列 A_{ii} の **Pfaffian** (定義割愛)

(歪対称行列 B に対して, $\text{Pf}(B)^2 = \det(B)$ が成り立つ)

Pfaffian

□ 定義: $2n \times 2n$ 歪対称行列 A に対して

$$\text{Pf}(A) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma_{2i-1} \sigma_{2i}}$$

□ Pfaffianの有名な性質に

$$\text{Pf}(A)^2 = \det(A)$$

□ Pfaffianの計算量は $O(n^3)$ cf. [Wimmer 2012]

➤ ガウスの消去法による $\det$ の計算に似た方法

Wimmer, M. (2012). "Efficient numerical computation of the Pfaffian for dense and banded skew-symmetric matrices". ACM Trans. Math. Softw. 38: 30. arXiv:1102.3440. doi:10.1145/2331130.2331138. S2CID 15331538.

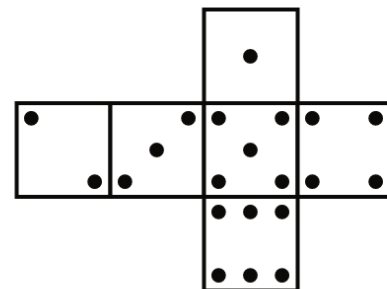
標準サイコロは強い



nontransitive dice Nash

標準サイコロ

<https://mathworld.wolfram.com/Dice.html>



72

Artem Hulko and Mark Whitmeyer, A game of nontransitive dice, Mathematics Magazine, 92:5,(2019), 368-373.

定理 [Hulko, Whitmeyer 19]

サイコロの各面の目は $\{1, \dots, n\}$ の要素とし, 合計は $\frac{n(n+1)}{2}$ とする. このとき**標準サイコロ** $(1, 2, \dots, n)$ は, どのサイコロにも負けない (勝つ or 引き分け).



サイコロの集合を戦略として, 純粋Nash戦略.

関連研究

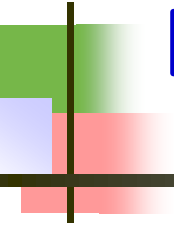
- B. De Schuymer, H. De Meyer, B. De Baets, Optimal strategies for equal-sum dice games, Discrete Applied Mathematics, 154: 2565 - 2576, 2006.
- M. Finkelstein, E. O. Thorp, Nontransitive dice with equal means, In Optimal Play: Mathematical Studies of Games and Gambling (S. N. Ethier and W. R. Eadington, eds.), Reno: Institute for the Study of Gambling and Commercial Gaming, 2007.
- Alex Schaefer and Jay Schweig, Balanced nontransitive dice, The College Mathematics Journal , Vol. 48, No. 1 (January 2017), pp. 10-16.
- Simon Joyce, Alex Schaefer, Douglas B. West, Thomas Zaslavsky, Strongly connectable digraphs and non-transitive dice, AKCE Int. J. Graphs Comb. 17:1 (2020), 480-485.

いろいろある (割愛).

本発表の概要

- 小松と小野によれば、相異なる手には引き分けのない偶数手のジャンケンには**ゲーム論的に無駄な手**が必ず存在する。
- **ジャンケン**は勝敗が**決定的**に定まるゲームのモデルである。一方、現実世界において、勝敗は往々にして**確率的**である。本研究では勝敗が確率的に定まるゲームの素朴なモデルとして、**非推移的サイコロ**について議論する。
- ある種の公平性の条件をおき、サイコロ構築問題を考える。**最強のサイコロ**が存在するか否かを調べる？

Is There a Strongest Die in a Set of Dice with the Same Mean Pips?



Shang Lu, *Shuji Kijima

Kyushu Univ.

割愛

AAAI 2022

Schaefer and Schweig 17

3個組のサイコロ集合 $\mathcal{D} = \{A, B, C\}$

- $A, B, C \subseteq \{1, \dots, 3m\}$
- $|A| = |B| = |C| = m$: **面数**
- $A \cap B = B \cap C = A \cap C = \emptyset$

例

$m = 6$

$A = \{3, 4, 7, 11, 14, 18\}$

$B = \{2, 6, 9, 10, 13, 17\}$

$C = \{1, 5, 8, 12, 15, 16\}$

[Schaefer and Jay Schweig 17] より

定理 [Schaefer and Schweig 17]

3個組のサイコロ集合 $\mathcal{D} = \{A, B, C\}$ が

$$\Pr[X_A > X_B] = \Pr[X_B > X_C] = \Pr[X_C > X_A]$$

を満たす (“**balanced**”)

$$\Leftrightarrow \text{目の合計が等しい, i.e., } \sum_{a \in A} a = \sum_{b \in B} b = \sum_{c \in C} c = \frac{3(3m+1)}{2}.$$

- Alex Schaefer and Jay Schweig, Balanced nontransitive dice, The College Mathematics Journal, Vol. 48, No. 1 (January 2017), pp. 10-16.

本論文の「 m 面サイコロ集合」

m は**偶数**とする.

技術的理由(?)

n 個の m 面サイコロ集合 $\mathcal{D} = \{A_1, \dots, A_n\}$

- $A_i \subseteq \{1, \dots, k\}$
- $|A_i| = m$: **面数**
- $A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$
- $\sum_{a \in A_i} a = w$

正則分割の例

$m = 6, n = 3$

$A = \{3, 4, 7, 11, 14, 18\}$

$B = \{2, 6, 9, 10, 13, 17\}$

$C = \{1, 5, 8, 12, 15, 16\}$

[Schaefer and Jay Schweig 17] より

□ (k, m, n, w) **サイコロ集合**: 上の条件を満たす $\mathcal{D}$

□ $k = mn$ のとき, **正則分割**と呼ぶ. $w = \frac{1}{n} \frac{mn(mn+1)}{2}$ に定まる.

Q. 最強サイコロは存在するか？

Easy Thm.

定理 [Lu and K 22]

$\mathcal{D}$ は**正則分割**とする. $A, B \in \mathcal{D}$ が $A \succ B$ なら $\exists C \in \mathcal{D}, C \succ A$.

系 [Lu and K 22]

正則分割 $\mathcal{D}$ に**狭義最強サイコロ**は存在しない.

参考: 定理 [Schaefer and Jay Schweig 17]

3個組のサイコロ集合 $\mathcal{D} = \{A, B, C\}$ が

$$\Pr[X_A > X_B] = \Pr[X_B > X_C] = \Pr[X_C > X_A]$$

を満たす(“**balanced**”)

$\Leftrightarrow$ **目の合計が等しい**, i.e., $\sum_{a \in A} a = \sum_{b \in B} b = \sum_{c \in C} c$.

Easy Thm.

定理 [Lu and K 22]

$\mathcal{D}$ は**正則分割**とする. $A, B \in \mathcal{D}$ が $A \succ B$ なら $\exists C \in \mathcal{D}, C \succ A$.

証明準備

$A, B \subseteq \{1, \dots, k\}$ に対して,

$$S(A, B) := |\{(a, b) \in A \times B \mid a > b\}|$$

注意:

$|A| \neq |B|$ でも良い.

例

A, B がサイコロ ($|A| = |B| = m, A \cap B = \emptyset$)

$$\Rightarrow \Pr[X_A > X_B] = \frac{S(A, B)}{m^2}$$

補題

A, B, C がdisjointなら

$$S(A, B) + S(B, C) = S(A \cup B, C)$$

証明

□ まず, 「 $S([mn] \setminus (A \cup B), A) > \frac{(n-2)m^2}{2}$ (1)」を示す.

$$\bullet S([mn] \setminus (A \cup B), A) = S([mn] \setminus A, A) - S(B, A) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \bullet S([mn] \setminus A, A) &= |\cup_{i=1}^m \{(x, a_i) | x > a_i, x \in [mn] \setminus A\}| \\ &= \sum_{i=1}^m (mn - a_i - (m - i)) \\ &= m^2 n - \frac{m(mn + 1)}{2} - \frac{m(m - 1)}{2} \\ &= \frac{(n - 2)m^2}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\bullet (2) > \frac{(n-1)m^2}{2} - \frac{m^2}{2} = \frac{(n-2)m^2}{2}. \quad (1) \text{を得る.}$$

□ 背理法の仮定として $C \succ A$ が存在しないとする.

$$\bullet S([mn] \setminus (A \cup B), A) = \sum_{D \in \mathcal{D} \setminus \{A, B\}} S(D, A) \leq (n - 2) \frac{m^2}{2}$$

➤ (1)に矛盾.

最強サイコロ存在の十分条件

命題

$k \geq 2m$ とする.

サイコロが2個存在するには $m + \frac{1}{2} \leq \frac{w}{m} \leq k - m + \frac{1}{2}$.

定理 (w が大きい時)

$k \geq 2m$ とする. $\frac{w}{m} > \frac{k}{2} + \left(\frac{k}{m} - \frac{3}{2}\right)$ のとき,

狭義最強サイコロが存在する.

定理 (w が小さい時)

$k \geq 2.5m$ とする. $\frac{w}{m} \leq m + 2$ のとき,

狭義最強サイコロが存在する.

(k, m, n, w)サイコロ集合 $\mathcal{D} = \{A_1, \dots, A_n\}$

- $A_i \subseteq \{1, \dots, k\}$
- $|A_i| = m$: 面数
- $A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\sum_{a \in A_i} a = w$

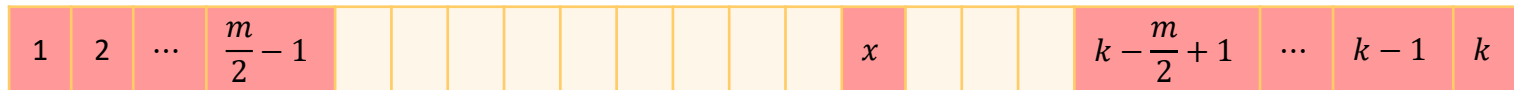
□ $k = mn$ のとき, **正則分割**と呼ぶ.

➤ $w = \frac{n(mn+1)}{2}$ に定まる.

証明の概略

定理 (w が大きい時)

$k \geq 2m$ とする. $\frac{w}{m} > \frac{k}{2} + \left(\frac{k}{m} - \frac{3}{2}\right)$ のとき,
狭義最強サイコロが存在する.



$$\left\{1, 2, \dots, \frac{m}{2}, x, k - \frac{m}{2} + 1, \dots, k\right\}$$

証明の概略

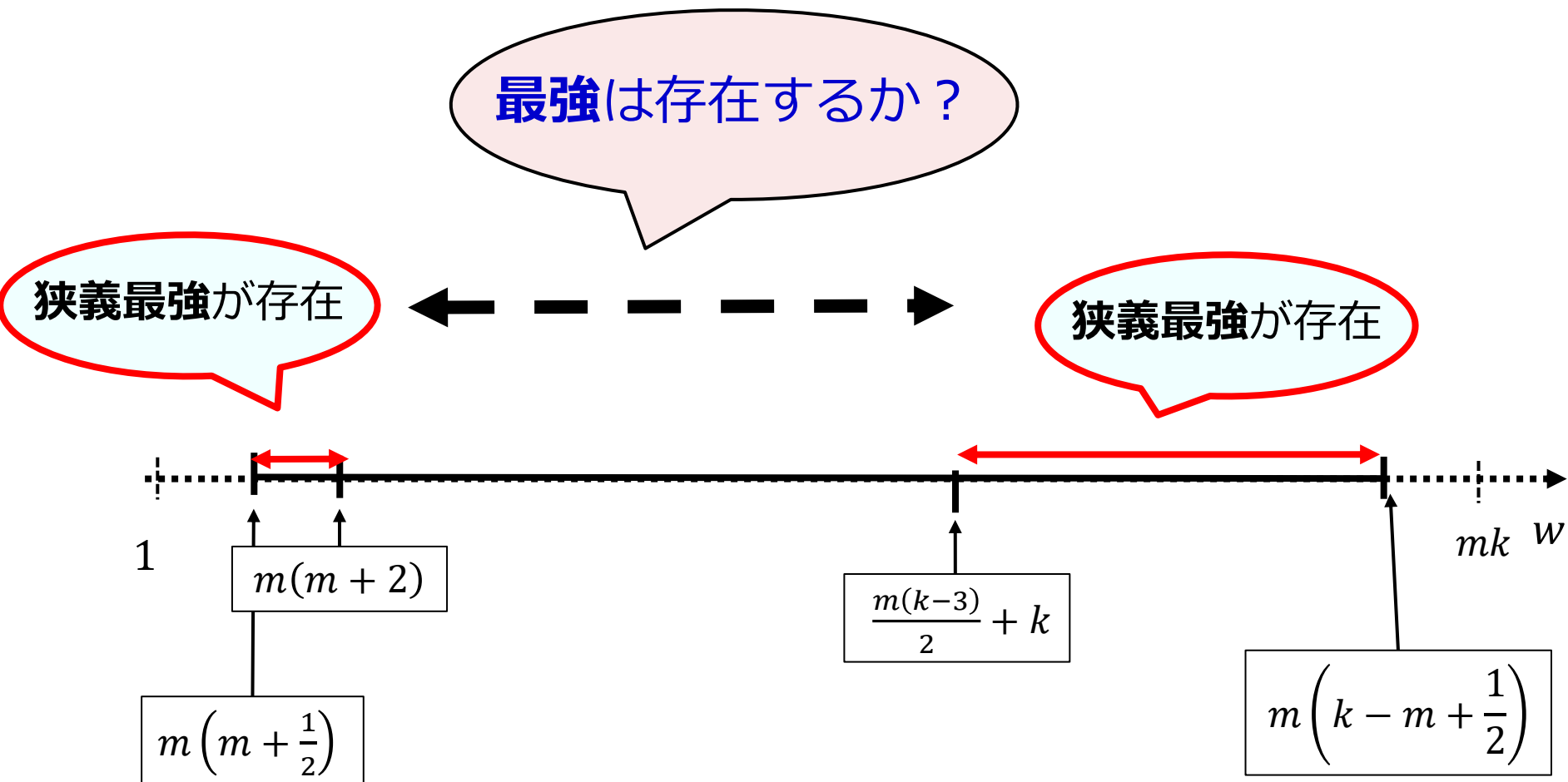
定理 (w が小さい時)

$k \geq 2.5m$ とする. $\frac{w}{m} \leq m + 2$ のとき,
狭義最強サイコロが存在する.

1				$\frac{m}{2} + 1$		...		$\frac{m}{2} + m - 1$			x						k
---	--	--	--	-------------------	--	-----	--	-----------------------	--	--	-----	--	--	--	--	--	-----

$$\left\{ \frac{m}{2} + 1, \dots, \frac{3m}{2} + 1, x \right\}$$

定理のまとめ



未解決の範囲について

(特定の k, m について,)**全探索**することにしました。
その前に。

最強性判定問題

Given: サイコロ A , 目の最大値 k .

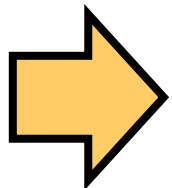
Question: A に勝つサイコロ $B \in \{1, \dots, k\} \setminus A$ は存在するか？

例題

$A = \{5, 6, 7, 12, 14, 18\} \subset \{1, \dots, 20\}$
は最強か？ ($W(A) = 62$)

定理

動的計画法で解ける. $O(kmw)$ 時間.



いろいろ拡張できる.

E.g., A, B ($A \succ B$)が与えられたとき, $\exists C, B \succ C \succ A$?

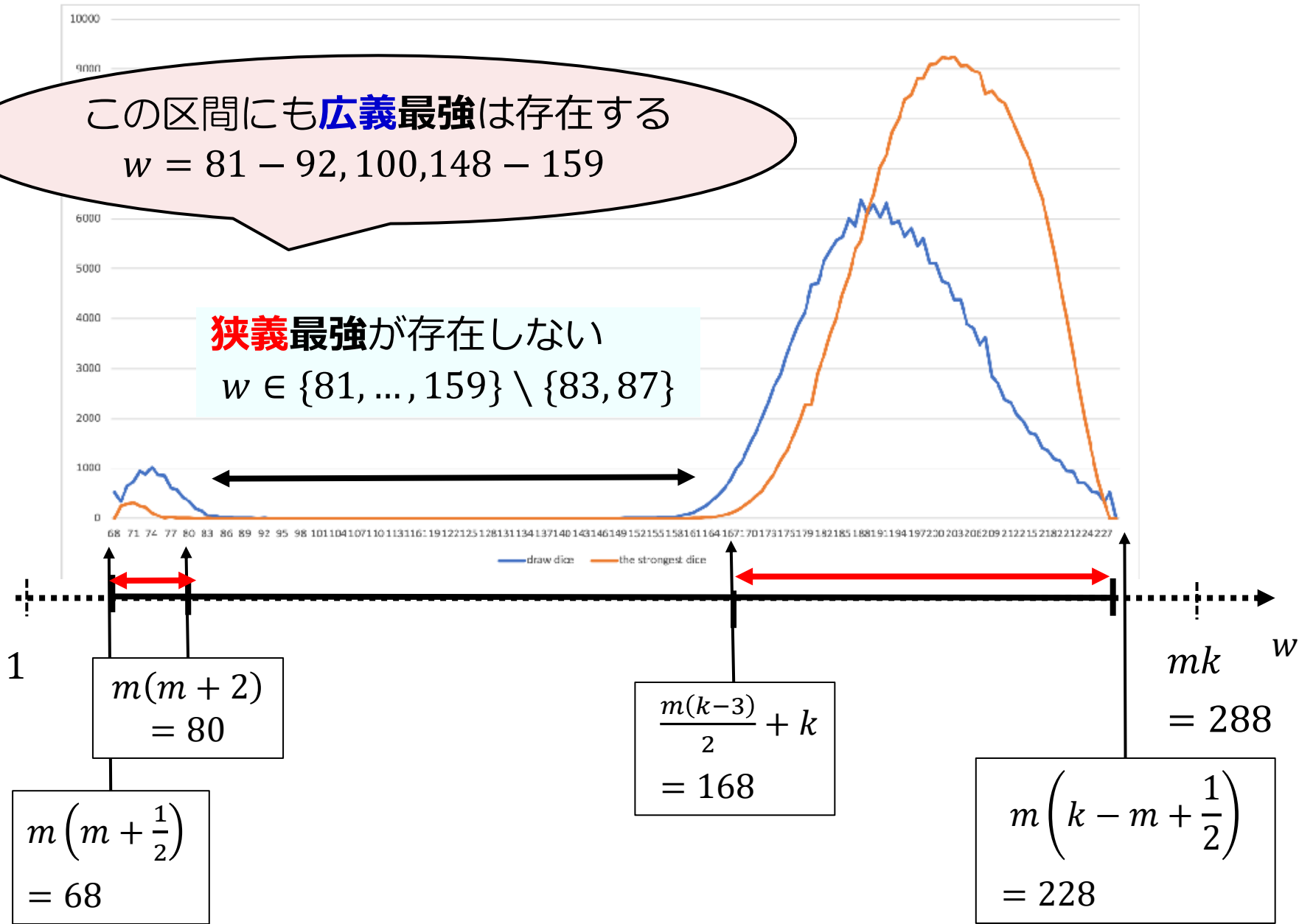
全探索しました: $m = 8, k = 36$

この区間にも**広義最強**は存在する

$$w = 81 - 92, 100, 148 - 159$$

狭義最強が存在しない

$$w \in \{81, \dots, 159\} \setminus \{83, 87\}$$



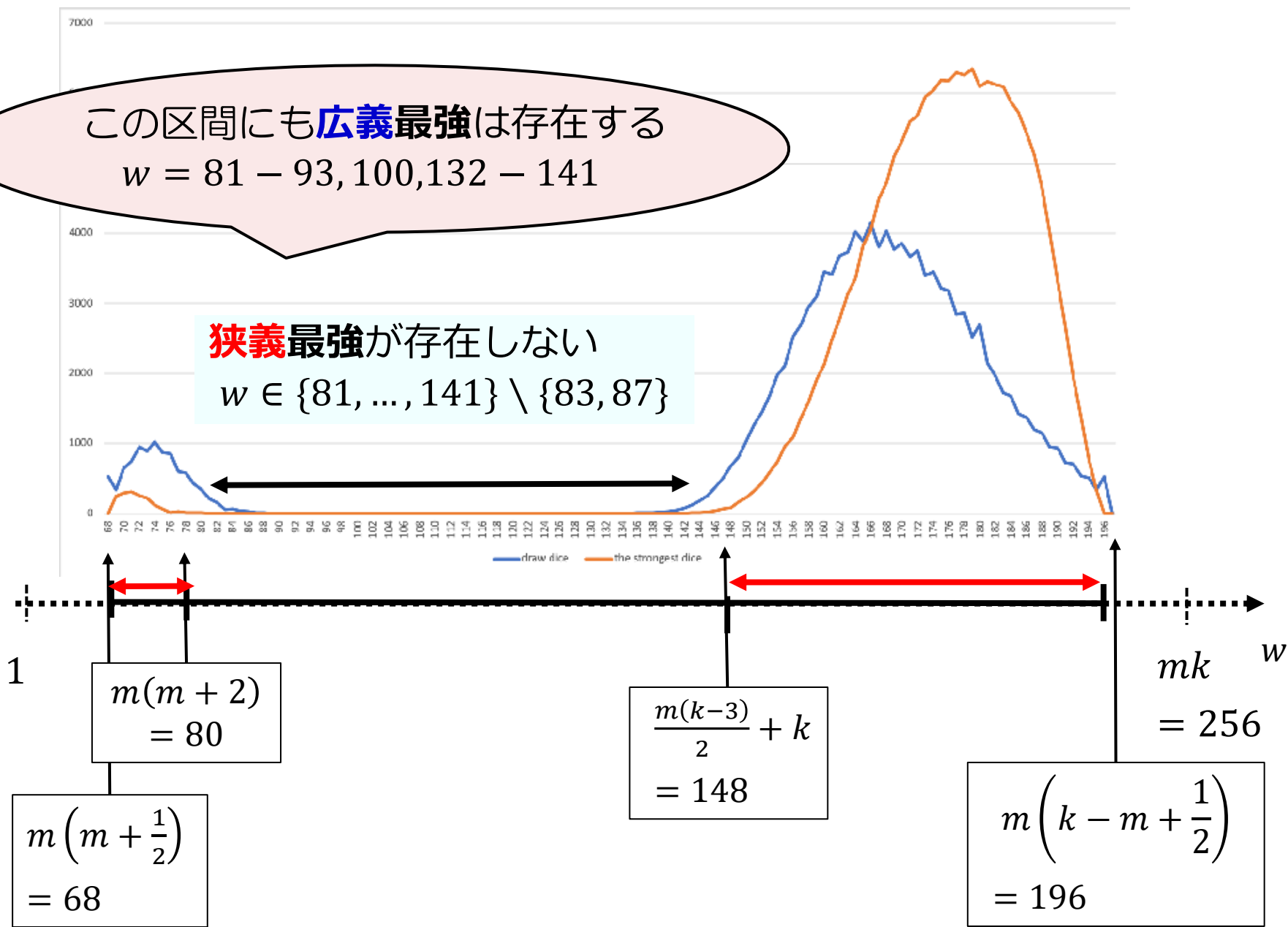
全探索しました: $m = 8, k = 32$

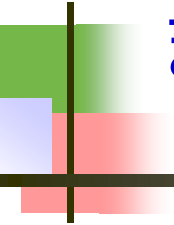
この区間にも**広義最強**は存在する

$$w = 81 - 93, 100, 132 - 141$$

狭義最強が存在しない

$$w \in \{81, \dots, 141\} \setminus \{83, 87\}$$





まとめ

Take home message

- **良い定理は何度でも発見される。**
 - 同じ結果を見つけても、あまりがっかりしない。
- たかがトップカンファレンス/ジャーナル、
されどトップカンファレンス/ジャーナル。
 - 自信をもって、自分の研究を進めましょう。
 - 良いところを目指しましょう。
 - 通すための努力。(「良いものは売れる」わけではない。)
 - 落ちてもあまりがっかりしないメンタル。

本発表の概要

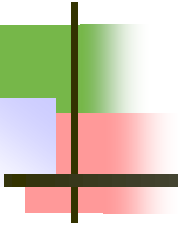
- 小松と小野によれば、相異なる手には引き分けのない偶数手のジャンケンには**ゲーム論的に無駄な手**が必ず存在する。
- ジャンケンは勝敗が**決定的**に定まるゲームのモデルである。一方、現実世界において、勝敗は往々にして**確率的**である。本研究では勝敗が確率的に定まるゲームの素朴なモデルとして、**非推移的サイコロ**について議論する。
- ある種の公平性の条件をおき、サイコロ構築問題を考える。**最強のサイコロ**が存在するか否かを調べる？

次回作に乞うご期待！

おわり。

今日の話題

- (0. 春季大会講演ダイジェスト: 私の数理工学・広報編)
- I. 私の数理工学・技術編1: **確率過程**と乱択アルゴリズム (20分)
- II. 私の数理工学・技術編2: **数理計画**とゲーム理論 (20分)
- III. 私の数理工学・技術編3: **計算論**とフラクタル (5分)



Can a Skywalker Localize the Midpoint of a Rope?

門出 顕宏, 山内由紀子, *来嶋秀治, 山下雅史

九州大学 大学院システム情報科学府

Akihiro Monde, Yukiko Yamauchi, Shuji Kijima, Masafumi Yamashita, Can a Skywalker Localize the Midpoint of a Rope?, ACM Trans. Comput. Theory 13(3): 17:1-17:23 (2021)

Can a Skywalker Localize the Midpoint of a Rope?

AKIHIRO MONDE, YUKIKO YAMAUCHI, SHUJI KIJIMA, and MASAFUMI YAMASHITA,
Kyushu University, Japan

This article poses a question about a simple localization problem. The question is if an *oblivious* walker on a line segment can localize the midpoint of the line segment in a *finite* number of steps observing the direction (i.e., Left or Right) and the distance to the nearest end point. This problem arises from *self-stabilizing* location problems by *autonomous mobile robots* with *limited visibility*, which is an abstract model attracting a wide interest in distributed computing. Contrary to appearances, it is far from trivial whether this simple problem is solvable, and it is not settled yet. This article is concerned with three variants of the problem with a minimal relaxation and presents self-stabilizing algorithms for them. We also show an easy impossibility theorem for bilaterally symmetric algorithms.

CCS Concepts: • Theory of computation → Recursive functions; Distributed computing models;

Additional Key Words and Phrases: Self-stabilization, autonomous mobile robot, computable real, small space algorithm, choice axiom

ACM Reference format:

Akihiro Monde, Yukiko Yamauchi, Shuji Kijima, and Masafumi Yamashita. 2021. Can a Skywalker Localize the Midpoint of a Rope?. *ACM Trans. Comput. Theory* 13, 3, Article 17 (July 2021), 23 pages.
<https://doi.org/10.1145/3460954>

17

1 INTRODUCTION

A blindfolded man stands on a long rope in the sky, and he wants to get to the midpoint of the rope. Two guides stand on both ends of the rope: Master Light (L) is at the left-end and Master Dark (R) is at the right-end. When the skywalker asks them a query “where am I?” two guides answer “you are exactly in the middle of the rope” if the skywalker does so, otherwise the guide in the near side answers “you are in my side distance d from me.” Can the man localize the midpoint by walking and asking on the rope?

Let a closed real interval $[-D, D] \subseteq \mathbb{R}$ denote the rope, where we assume $D > 1$, meaning that the rope is not too short, for some technical reason. For a location query by the skywalker at $x \in [-D, D]$, our oracle returns the halting state q_{Mid} if $x = 0$, otherwise it returns the near side $\text{SIDE}(x) \in \{L, R\}$ and the distance $d(x)$ from the nearest end point to x , i.e., the skywalker observes $\text{SIDE}(x) = R$ and $d(x) = D - x$ if $x > 0$, or $\text{SIDE}(x) = L$ and $d(x) = D + x$ if $x < 0$. Of course, he

This work was/is partly supported by JSPS KAKENHI Grant Numbers JP15K15938 and JP17K19982.

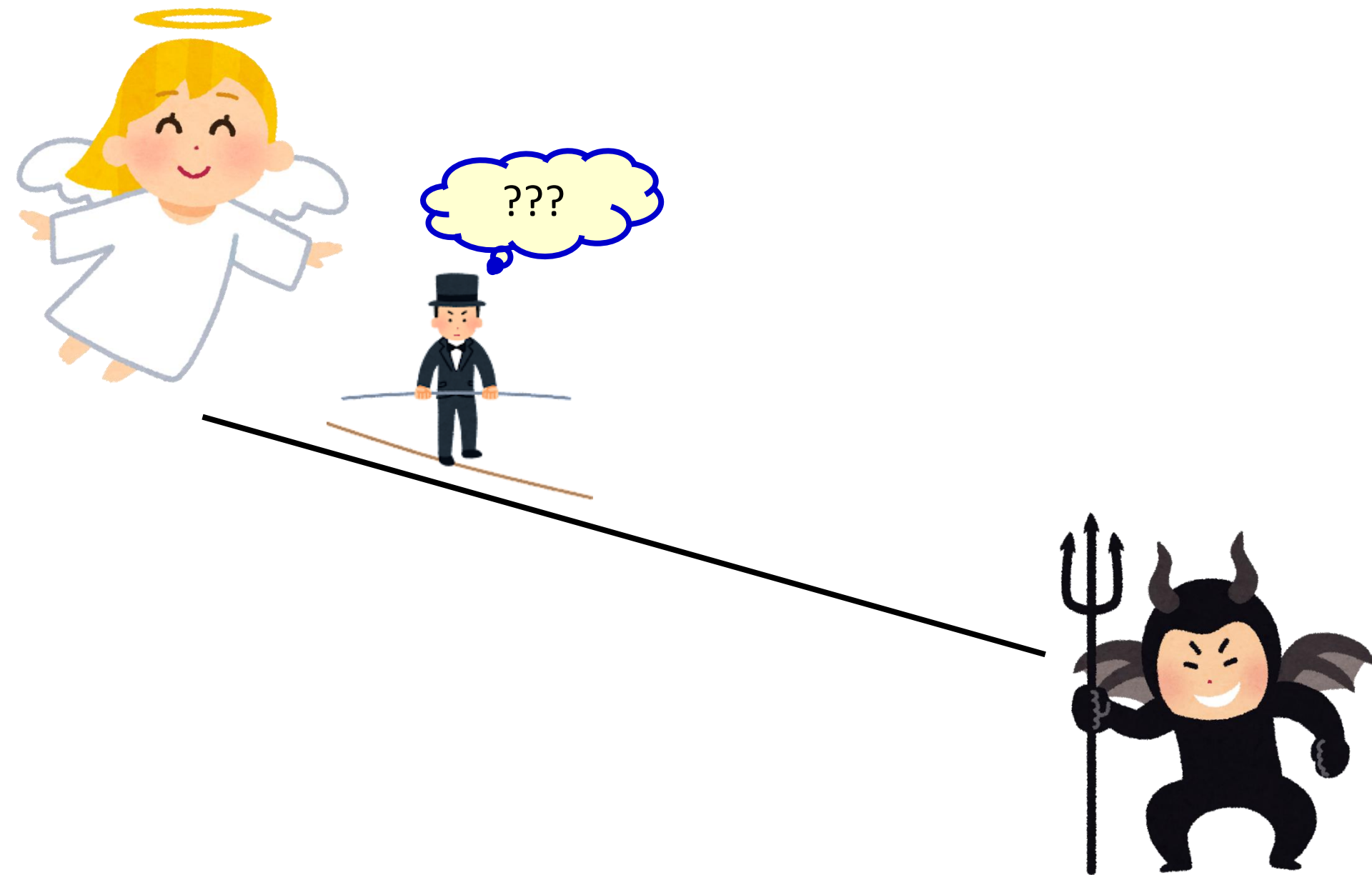
Authors' addresses: A. Monde, Y. Yamauchi, S. Kijima (corresponding author), and M. Yamashita, Kyushu University, 744, Motooka, Nishi-Ku, Fukuoka, 819-0395, Japan; emails: monde@tcs.inf.kyushu-u.ac.jp, [yamauchi, kijima, mak]@inf.kyushu-u.ac.jp.

Permission to make digital or hard copies of all or part of this work for personal or classroom use is granted without fee provided that copies are not made or distributed for profit or commercial advantage and that copies bear this notice and the full citation on the first page. Copyrights for components of this work owned by others than ACM must be honored. Abstracting with credit is permitted. To copy otherwise, or republish, to post on servers or to redistribute to lists, requires prior specific permission and/or a fee. Request permissions from permissions.acm.org.

© 2021 Association for Computing Machinery.

1942-3454/2021/07-ART17 \$15.00

<https://doi.org/10.1145/3460954>



問題

スカイウォーカーは数直線 $[-D, D]$ 上にいる。

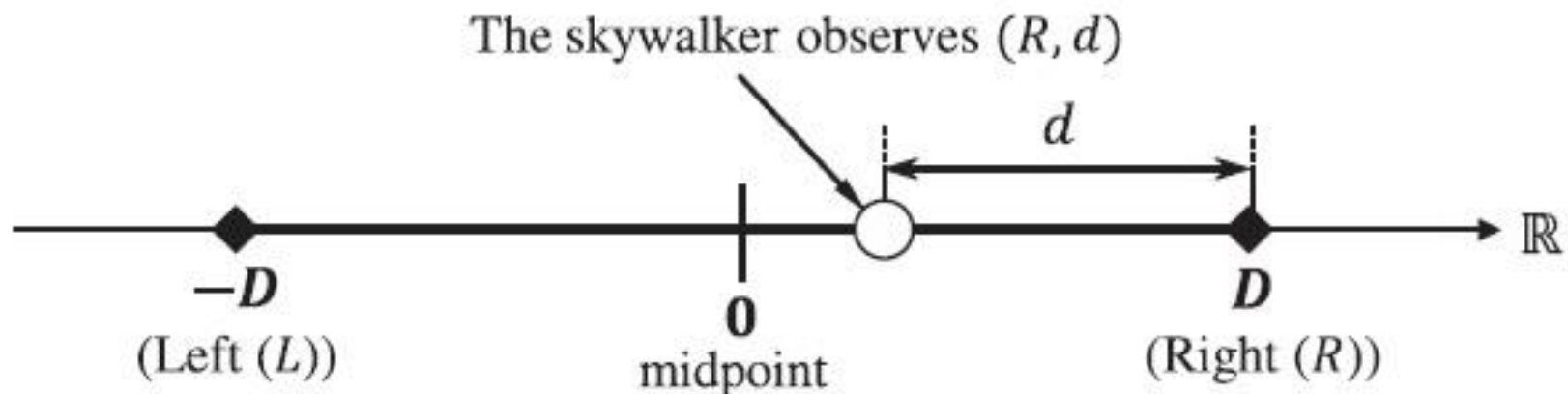
スカイウォーカーは現在地を質問できる。

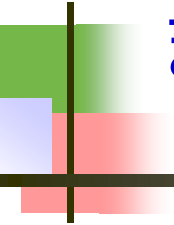
回答は、最寄りの端点(右 or 左)とその端点までの距離 d 。

スカイウォーカーは D を知らない。 前のステップの記憶もない。

スカイウォーカーは原点0に到達できるか？

未解決





まとめ

今日の話題

- (0. 春季大会講演ダイジェスト: 私の数理工学・広報版)
 - I. 私の数理工学・技術編1: **確率過程**と乱択アルゴリズム
 - II. 私の数理工学・技術編2: **数理計画**とゲーム理論
 - III. 私の数理工学・技術編3: **計算論**とフラクタル

Take Home Message

若手の方

- 共同研究（理論）にご興味の方はお気軽にお問い合わせください.
- 楽しく研究してください.

企業の方

- 共同研究（実践）にご興味の方はお気軽にお問い合わせください.
 - **滋賀大学DSセンター**では, 企業連携を推進しています.

皆様

- 今後ともよろしくお願いいたします.

関係者

- 年寄りの会（15年後）まで研究頑張りましょう.

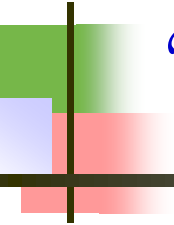
滋賀大学DSセンターは企業連携に力を入れています。

データサイエンスと AIが創る 新たな社会を先導する

データサイエンス・AIイノベーション研究推進センター

Data Science and AI Innovation Research Promotion Center

全国ではじめてデータサイエンス系の教育研究センター、学部、大学院を開設した滋賀大学は、我が国のデータサイエンス・AIの教育研究をより一層推進するため、2022年4月、これまでの体制を拡充し、新センターを整備しました。国内トップレベルの新センターでは、Society5.0の到来の鍵をにぎるデータサイエンスとAIの先端研究を牽引するとともに、その価値を社会に伝え、企業・自治体と手を取り合い、社会に実装するための活動を進めます。



The end

Thank you for the attention.