June 29, 2023

公平な安定マッチングと対数優モジュラ分布

来嶋秀治

滋賀大学 データサイエンス学部

研究略歴

略歴

2002. 3. 東大 情報理工 博士了

博士論文「MCMC法における近似精度保証と完璧サンプリング法」

2007. 4.– 2010.3. 京大 数理解析研 助教

2010. 4.– 2022.3. 九大 システム情報科学研究院 准教授

2022.4. – 現在 滋賀大学 データサイエンス学部 教授

研究分野

数理工学, 理論計算機科学(P vs. NP), オペレーションズ・リサーチ(数理計画法)

キーワード

- ✓ 離散確率過程: ランダムウォーク, MCMC (マルコフ連鎖モンテカルロ)
- ✓ 離散最適化: **劣モジュラ関数**, グラフ
- ✓ その他: 自律分散ロボット [分散計算論],
  オンライン学習 [機械学習],
  安定マッチング [ゲーム理論],
  マルウェアの系統樹推定 [サイバーセキュリティ], etc.

組合せ最適化 と P≠NP予想

問題 1.

Max. $2x + 4y + 7z$

S.t. $3x + 2y \leq 5,\ \ 2y + 4z \leq 5,\ \ 3x + 4z \leq 5\quad (x, y, z \geq 0)$

問題 2.

Max. $2x + 4y + 7z$

S.t. $3x + 2y + 4z \leq 5\quad (x, y, z \in \{0,1\})$

組合せ最適化 と P≠NP予想

線形計画法 (Linear Programming)

Max. $c^{\top}x$

S.t. $Ax \leq b$ $(x \geq 0)$

整数計画法 (Integer Programming)

Max. $c^{\top}x$

S.t. $ax \leq b$ $(x \in \{0,1\})$

~~MBA~~ 本格的なアルゴリズム設計論

Operations research

- Mathematical Programming (optimization)

線形計画は効率的に解ける． ~~Danzig~~ Khachiyan

整数計画は一般には解けない． NP-hardなりに何とかする.

まとめ

最適化問題を解きたい.
何か良いアルゴリズムありませんか？

- アルゴリズム設計と「帰着」
  - ✓ 良いアルゴリズムは「数学構造」に従う.
    - ➢ ネットワークフローへの帰着を目指す.
    - ➢ 組合せ最適化はたいていNP困難.
- メディアン安定結婚問題のご紹介
  - ✓ 分配束
- 対数優モジュラ分布のご紹介
  - ✓ 離散凸

帰着 (reduction)

- 問題の変形のこと
  - Cf. 式変形

    例題: $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x = 0$．実数$x$は何？

    解答例: $(x+1)^2 = t$として式変形すると

    $t^2 - 1 = 0$

    よって$t = \pm 1$.

    xが実数だとしたら，$x = 0\ or\ -2$
- NP困難
  - クラスNPのすべての問題が多項式時間帰着される問題
- (帰着によって)何が保存されて，何が保存されないのか？

3分計算機科学史

qualitative

- Turing機械 [Turing 1936]
  - 「計算」の抽象モデル
    - 万能計算機 (= どんな「計算」も可能)
    - 答え(Yes or No)がある ≠ 計算不可能
    - Cf. Hilbert計画(1900) ～Goedelの不完全性定理(1931)

quantitative

- PとNP [Cook 1971]
  - 「計算効率性」のモデル
    - 万能アルゴリズム (= どんな問題も「効率的」に解く) ?
    - 答え合わせができる ≠ スクラッチで解ける？
    - ミレニアム問題(2000)～？

対数優モジュラ (対数凹の離散版)

$N = \{1,2,\dots,n\}$とする.

関数 $g: 2^N \to \mathbb{R}_{>0}$ が対数優モジュラとは,

$$g(X)g(Y) \le g(X \cup Y)g(X \cap Y)$$

が任意の $X,Y \subseteq N$ について成り立つこと，とする.

- 言い換えると，$-\log g$ が劣モジュラ: $f = -\log g$とおくと

$$f(X) + f(Y) \ge f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$$

が任意の $X,Y \in 2^N$について成り立つことを劣モジュラという.

- 劣モジュラ関数は「**離散版の凸関数**」と言われる.
  - ✓ f が劣モジュラ⇔Lovasz拡張が凸
  - ✓ 最小化は多項式時間(簡単)、最大化はNP困難(難しい)

集合関数(離散関数)

$f: 2^N \to \mathbb{R}$ が対数優モジュラ
$\Leftrightarrow -\log f$ が劣モジュラ

連続関数

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が対数凹
$\Leftrightarrow -\log f$ が凸

対数優モジュラ ←−−−−−→ 対数凹:
尤度最大化は効率的計算可能.

<u>対数優モジュラ分布</u>

- 強磁性 Ising
- Tutte多項式
- FKG不等式

<u>対数凹分布</u>

- ガウス分布/正規分布

未解決. 対数優モジュラ分布からのサンプリングは効率的計算可能**か**？

対数凹分布からのサンプリングは効率的計算可能.

対偶: $[P \Rightarrow Q] \equiv [\neg P \Leftarrow \neg Q]$

対数優モジュラ分布からのサンプリングが効率的計算可能
⇒安定マッチングの総数の近似値が効率的計算可能
⇔公平な安定マッチングの近似が効率的計算可能.

対数優モジュラ分布からのサンプリングが不可能
⇐公平な安定マッチングは近似ですら効率的計算は不可能

1,049円(税込み)

MCMC法で積分/数え上げの近似計算ができる

Talk plan

1. 導入: 現代のアルゴリズム設計論 (15分)
   - 帰着
   - 対数優モジュラ
2. 安定マッチング (15分)
   - Gale Shapleyアルゴリズム
   - 「素朴なアルゴリズム」
3. 公平な安定マッチング (15分)
   - Median property
   - 分配束とアルゴリズム
4. 劣モジュラ関数の変数変換 (15分)
5. 最近の展開

[1] Shuji Kijima and Toshio Nemoto, On randomized approximation for finding a level ideal of a poset and the generalized median stable matchings, Mathematics of Operations Research, 37:2 (May 2012), 356--371.

[2] Junpei Nakashima, Yukiko Yamauchi, Shuji Kijima and Masafumi Yamashita, Finding submodularity hidden in symmetric difference, SIAM Journal on Discrete Mathematics, 34:1 (2020), 571--585.

[3] Tomohito Fujii and Shuji Kijima, Every finite distributive lattice is isomorphic to the minimizer set of an M♮-concave set function, Operations Research Letters, 49:1 (January 2021), 1--4.

2.1.安定結婚問題 [Gale & Shapley ‘62]

安定結婚問題 [Gale & Shapley '62]

a. 選好リスト

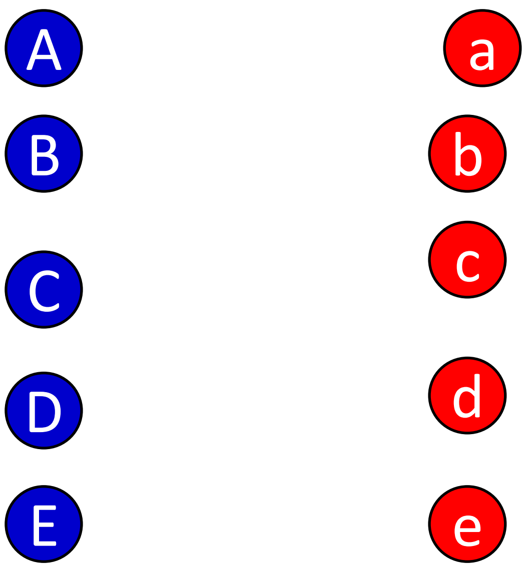
Men's lists favor

A	*a*	*b*	*d*	*c*	*e*
B	*b*	*a*	*c*	*d*	*e*
C	*c*	*d*	*b*	*e*	*a*
D	*d*	*c*	*e*	*a*	*b*
E	*e*	*c*	*a*	*b*	*d*

Women's lists favor

a	*B*	*A*	*C*	*D*	*E*
b	*C*	*A*	*B*	*D*	*E*
c	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*
d	*A*	*C*	*D*	*E*	*B*
e	*D*	*E*	*A*	*B*	*C*

men women



マッチング ⇔ n組の男女のペア;
各人はペアに丁度1回出現.

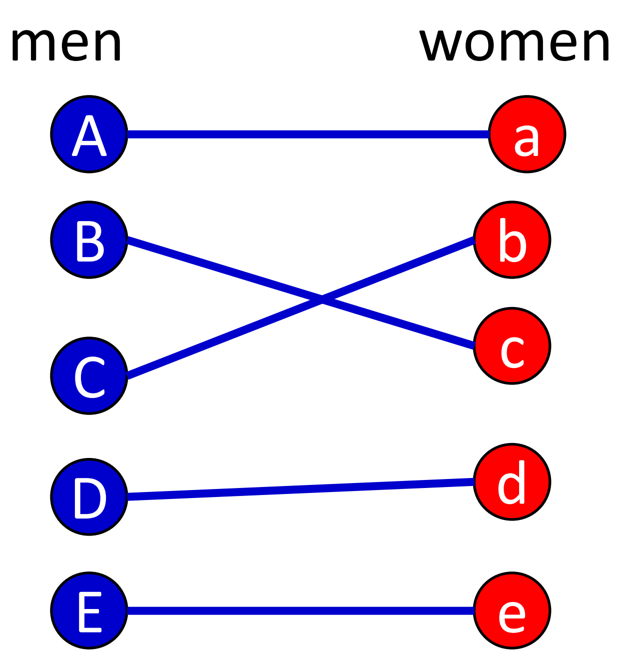
a. 選好リスト

Men's lists

A	*a*	*b*	*d*	*c*	*e*
B	*b*	*a*	*c*	*d*	*e*
C	*c*	*d*	*b*	*e*	*a*
D	*d*	*c*	*e*	*a*	*b*
E	*e*	*c*	*a*	*b*	*d*

Women's lists

a	*B*	*A*	*C*	*D*	*E*
b	*C*	*A*	*B*	*D*	*E*
c	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*
d	*A*	*C*	*D*	*E*	*B*
e	*D*	*E*	*A*	*B*	*C*



マッチングμに対する

blocking pair ⇔ 男女のペア;
互いが, μでの相手より好ましい.

安定結婚問題
✓ 選好リスト
✓ マッチング
✓ blocking pair
✓ 安定マッチング

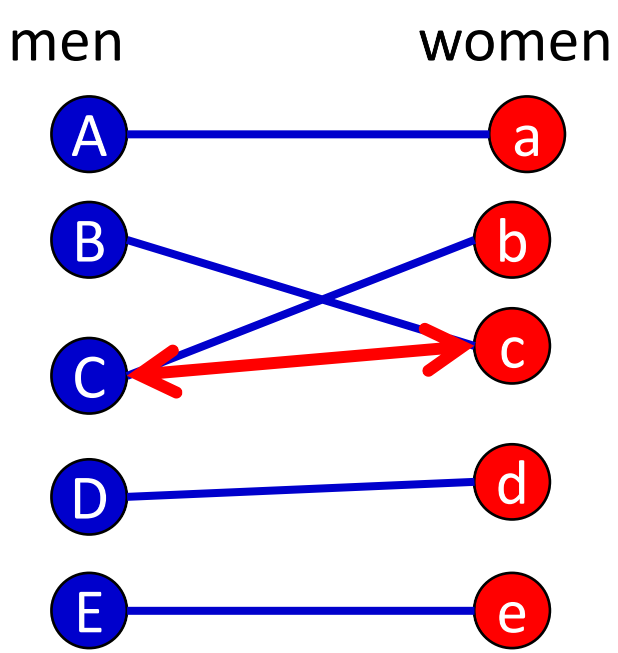
a.選好リスト

Men's lists

A	*a*	*b*	*d*	*c*	*e*
B	*b*	*a*	*c*	*d*	*e*
C	$\boxed{c}$	*d*	*b*	*e*	*a*
D	*d*	*c*	*e*	*a*	*b*
E	*e*	*c*	*a*	*b*	*d*

Women's lists

a	*B*	*A*	*C*	*D*	*E*
b	*C*	*A*	*B*	*D*	*E*
c	*E*	*D*	$\boxed{C}$	*B*	*A*
d	*A*	*C*	*D*	*E*	*B*
e	*D*	*E*	*A*	*B*	*C*



安定マッチング ⇔ マッチング; blocking pair を持たない.

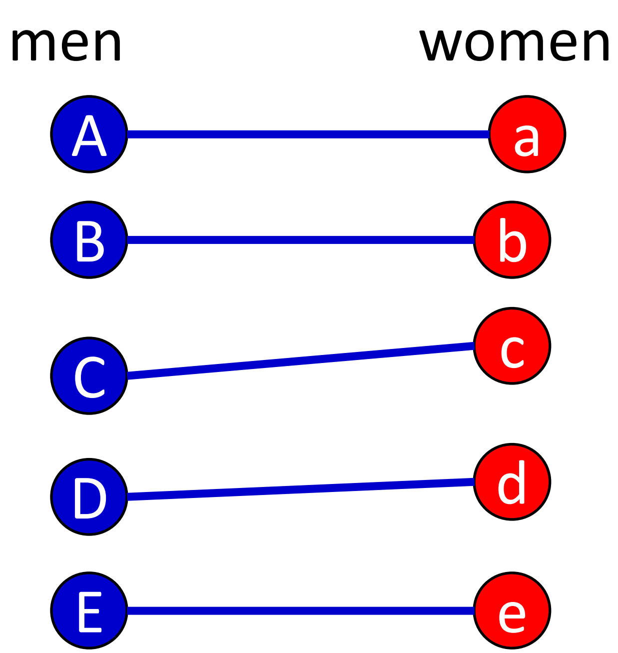
a.選好リスト

Men's lists

A	*a*	*b*	*d*	*c*	*e*
B	*b*	*a*	*c*	*d*	*e*
C	*c*	*d*	*b*	*e*	*a*
D	*d*	*c*	*e*	*a*	*b*
E	*e*	*c*	*a*	*b*	*d*

Women's lists

a	*B*	*A*	*C*	*D*	*E*
b	*C*	*A*	*B*	*D*	*E*
c	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*
d	*A*	*C*	*D*	*E*	*B*
e	*D*	*E*	*A*	*B*	*C*



安定結婚問題

問題: 次の選好リストに対して、安定マッチングは存在するか？

Men's lists

A	*a*	*c*	*d*	*b*	*e*
B	*a*	*c*	*b*	*d*	*e*
C	*a*	*e*	*d*	*c*	*b*
D	*a*	*b*	*c*	*e*	*d*
E	*c*	*b*	*a*	*e*	*d*

Women's lists

a	*E*	*C*	*B*	*A*	*D*
b	*A*	*B*	*D*	*C*	*E*
c	*C*	*D*	*B*	*E*	*A*
d	*B*	*D*	*E*	*A*	*C*
e	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*

答え: 存在する

Gale & Shapleyのアルゴリズムで見つけてみよう！

安定結婚問題

Men's lists					
A	*a*	*c*	*d*	*b*	*e*
B	*a*	*c*	*b*	*d*	*e*
C	*a*	*e*	*d*	*c*	*b*
D	*a*	*b*	*c*	*e*	*d*
E	*c*	*b*	*a*	*e*	*d*

Women's lists					
a	*E*	*C*	*B*	*A*	*D*
b	*A*	*B*	*D*	*C*	*E*
c	*C*	*D*	*B*	*E*	*A*
d	*B*	*D*	*E*	*A*	*C*
e	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*

Gale & Shapleyのアルゴリズム

1. 婚約者のいない男性は好きな人にプロポーズ
2. プロポーズされた女性はその男性が
   1. 今の婚約者よりも好きなら婚約変更
   2. 今の婚約者の方が好きならそのまま

アルゴリズムを考えるときに大切な２つのこと

- ✓ 答えは正しいか？[正当性]
- ✓ 計算時間は？[効率性]

GSアルゴリズムは正しい答えを出すか？

Men's lists

A	*a*	*c*	*d*	*b*	*e*
B	*a*	*c*	*b*	*d*	*e*
C	*a*	*e*	*d*	*c*	*b*
D	*a*	*b*	*c*	*e*	*d*
E	*c*	*b*	*a*	*e*	*d*

Women's lists

a	*E*	*C*	*B*	*A*	*D*
b	*A*	*B*	*D*	*C*	*E*
c	*C*	*D*	*B*	*E*	*A*
d	*B*	*D*	*E*	*A*	*C*
e	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*

定理

GSアルゴリズムの出力は安定マッチング(blocking pairはいない)

証明

✓ アルゴリズム終了時、婚約してない人は居ない
  - もし居たら、その女性(w)はだれからもプロポーズされてない。
  - 婚約してない男性(m)は、wにプロポーズしてない。

✓ 男性は(最終的な)婚約者より好きな女性には、プロポーズして断られている。
  - 鞍替えできるのは女性だけ。女性の相手は良くなる一方。

■

2.2. シン・安定結婚問題

安定結婚問題

問題: 次の選好リストに対して、安定マッチングは存在するか？

Men's lists

A	*a*	*c*	*d*	*b*	*e*
B	*a*	*c*	*b*	*d*	*e*
C	*a*	*e*	*d*	*c*	*b*
D	*a*	*b*	*c*	*e*	*d*
E	*c*	*b*	*a*	*e*	*d*

Women's lists

a	*E*	*C*	*B*	*A*	*D*
b	*A*	*B*	*D*	*C*	*E*
c	*C*	*D*	*B*	*E*	*A*
d	*B*	*D*	*E*	*A*	*C*
e	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*

安定マッチング？ → NO! (blocking pairが存在)

[正当性]

これで本当に良いのか、

30年間未解決だった。

だったら、blocking pairを

解消すればいいじゃん？

駄目です！ [Tamura 1993]

(解決したのは日本人: 田村明久先生(現 慶應義塾大学))

安定結婚問題

問題: 次の選好リストに対して、安定マッチングは存在するか？

Men's lists

A	*a*	*c*	*d*	*b*	*e*
B	*a*	*c*	*b*	*d*	*e*
C	*a*	*e*	*d*	*c*	*b*
D	*a*	*b*	*c*	*e*	*d*
E	*c*	*b*	*a*	*e*	*d*

Women's lists

a	*E*	*C*	*B*	*A*	*D*
b	*A*	*B*	*D*	*C*	*E*
c	*C*	*D*	*B*	*E*	*A*
d	*B*	*D*	*E*	*A*	*C*
e	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*

ふーん…

じゃぁさ、全部調べて、

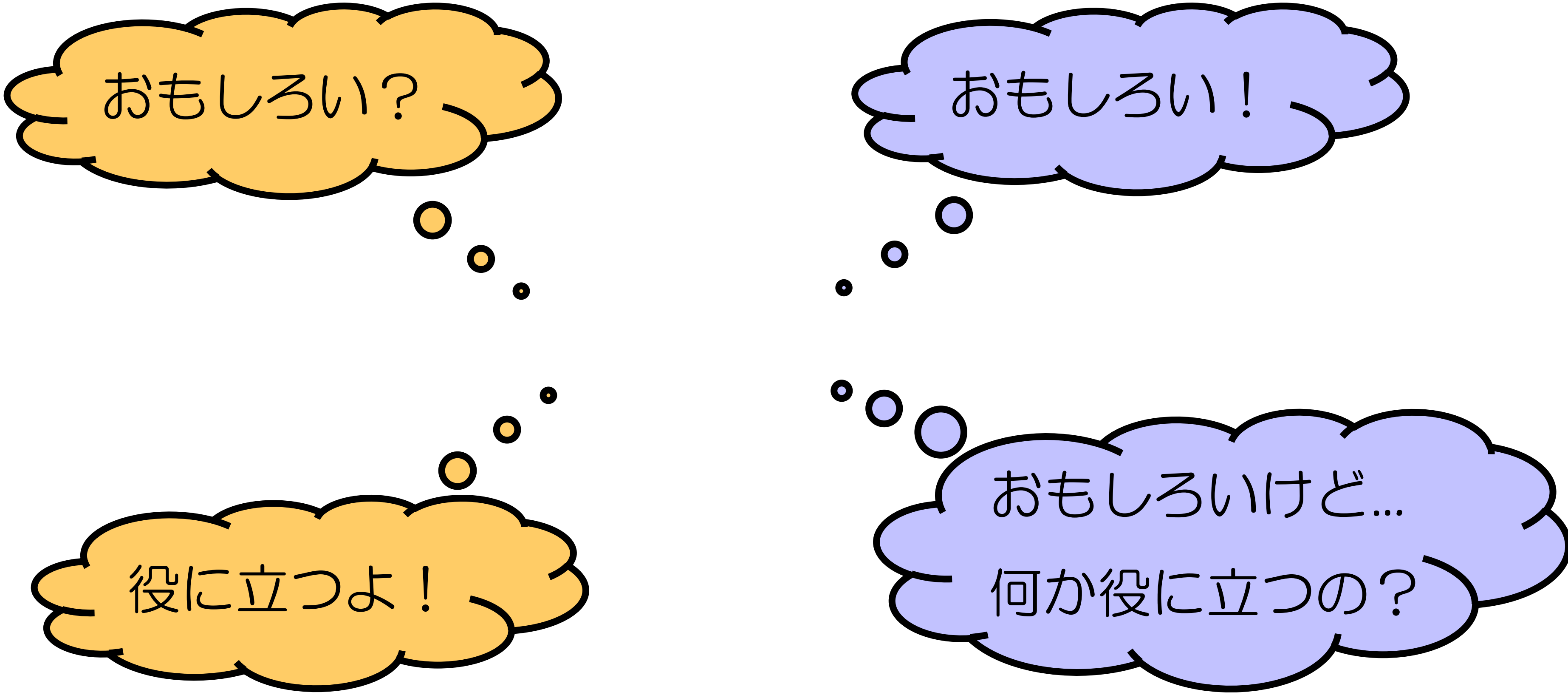
blocking pairがない奴を見つければ？

アルゴリズムを考えるときに大切な２つのこと

- ✓ 答えは正しいか？[正当性]
- ✓ 計算時間は？[効率性]

	全通り n!	GSアルゴリズムのプロポーズの回数
n=5	5! = 120	$5^2 = 25$
n=10	10! = 3,628,800	$10^2 = 100$
n=150	$150! = 5.71\times10^{262}$	$150^2 = 22{,}500$
n=3000	$3000! = 10^{10431}$	$3000^2 = 9{,}000{,}000$
$n=10^5$	とにかくでかい！	$(10^5)^2 = 10^{10}$

安定結婚問題



- ✓ (日本の)研修医の配属
- ✓ (アメリカの)大学の入学選考
- ✓ (電気情報工学科の)卒論の研究室配属

安定結婚問題

2012年ノーベル経済学賞: Shapley & Roth

（安定配分理論と市場設計の実践に関する功績）

もともとは経済の論文でなく、数学の論文。

「『難しい数式を扱うだけが数学ではない』という例にお奨めする。数学的思考に慣れていないと難しい。」

D. Gale and L.S. Shapley,

College admissions and the stability of marriage,

The American Mathematical Monthly, 69 (1962), 9-15.

数学から見る安定結婚問題

- ✓ 操作不可能性 (ゲーム理論)
  - ➢ 「うそ」をついても得をしない。
- ✓ 安定マッチングは一つとは限らない。
  - ➢ 分配束をなす。 (組合せ論/確率論)
  - ➢ 公平性: 男性 vs 女性, 受験生 vs 大学, 研修医 vs 病院, etc.

教訓

自分から告白する方が、良い相手と付き合える！

3.一般化メディアン安定結婚問題の計算量

MATHEMATICS OF OPERATIONS RESEARCH
Vol. 37, No. 2, May 2012, pp. 356–371
ISSN 0364-765X (print) | ISSN 1526-5471 (online)

http://dx.doi.org/10.1287/moor.1110.0526

On Randomized Approximation for Finding a Level Ideal of a Poset and the Generalized Median Stable Matchings

Shuji Kijima
Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University, Fukuoka 819-0395, Japan,
kijima@inf.kyushu-u.ac.jp, http://tcslab.csce.kyushu-u.ac.jp/~kijima/

Toshio Nemoto
Graduate School of Information and Communications, Bunkyo University, Chigasaki 253-8550, Japan,
nemoto@shonan.bunkyo.ac.jp

This study is concerned with finding a *level ideal* (LI) of a partially ordered set (poset). Given a finite poset P, the level of each element $p \in P$ is defined as the number of ideals that do not include p, then the problem is to find the ith LI–the ideal

安定マッチングは一つとは限らない

a. Preference list

Men's lists

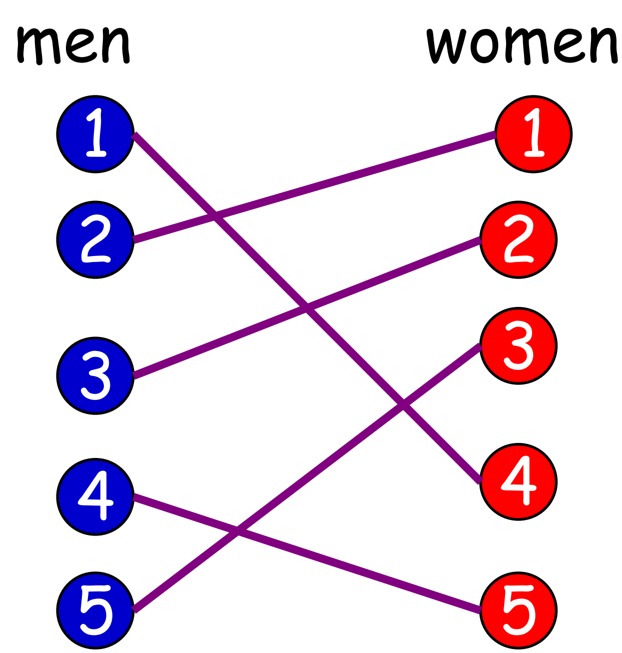
m_1	w_1	w_2	w_4	w_3	w_5
m_2	w_2	w_1	w_3	w_4	w_5
m_3	w_3	w_4	w_2	w_5	w_1
m_4	w_4	w_3	w_5	w_1	w_2
m_5	w_5	w_3	w_1	w_2	w_4

Women's lists

w_1	m_2	m_1	m_3	m_4	m_5
w_2	m_3	m_1	m_2	m_4	m_5
w_3	m_5	m_4	m_3	m_2	m_1
w_4	m_1	m_3	m_4	m_5	m_2
w_5	m_4	m_5	m_1	m_2	m_3

b. Stable matchings (from men's view)

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8
m_1	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**4**	**2**	**4**
m_2	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**1**	**1**
m_3	**3**	**3**	**4**	**4**	**4**	**2**	**4**	**2**
m_4	**4**	**4**	**3**	**3**	**5**	**3**	**5**	**5**
m_5	**5**	**5**	**5**	**5**	**3**	**5**	**3**	**3**



安定マッチングの“好ましさ”

a. Preference list

Men's lists

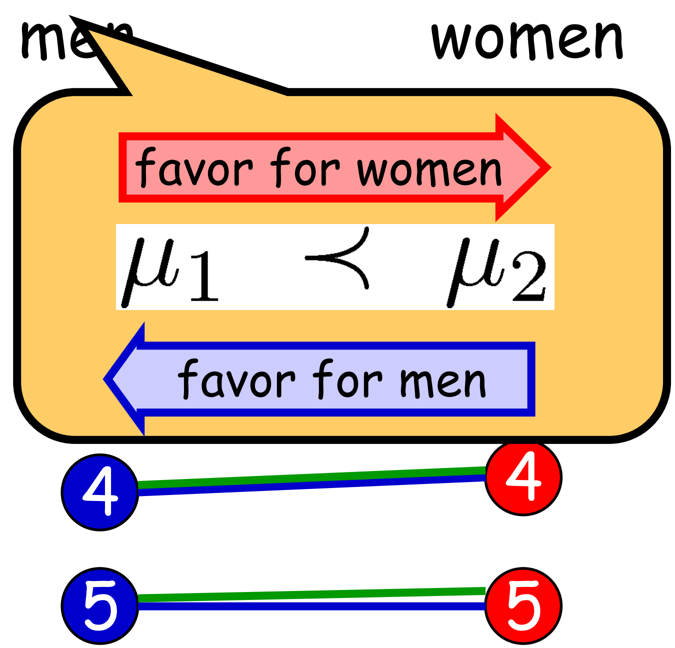
m_1	w_1	w_2	w_4	w_3	w_5
m_2	w_2	w_1	w_3	w_4	w_5
m_3	w_3	w_4	w_2	w_5	w_1
m_4	w_4	w_3	w_5	w_1	w_2
m_5	w_5	w_3	w_1	w_2	w_4

Women's lists

w_1	m_2	m_1	m_3	m_4	m_5
w_2	m_3	m_1	m_2	m_4	m_5
w_3	m_5	m_4	m_3	m_2	m_1
w_4	m_1	m_3	m_4	m_5	m_2
w_5	m_4	m_5	m_1	m_2	m_3

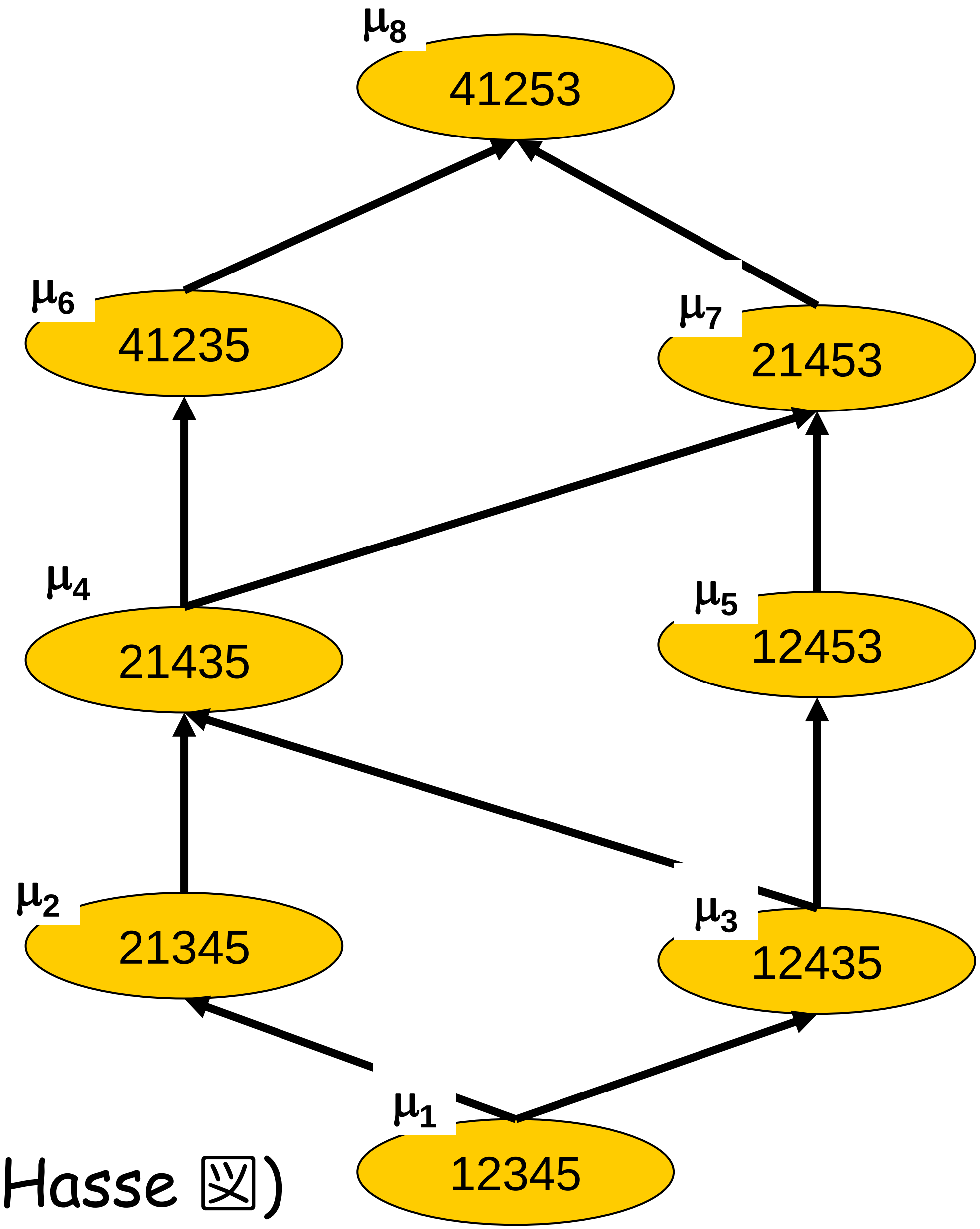
b. Stable matchings (from men's view)

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8
m_1	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**4**	**2**	**4**
m_2	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**1**	**1**
m_3	**3**	**3**	**4**	**4**	**4**	**2**	**4**	**2**
m_4	**4**	**4**	**3**	**3**	**5**	**3**	**5**	**5**
m_5	**5**	**5**	**5**	**5**	**3**	**5**	**3**	**3**



[Conway (Knuth '77,'91)]

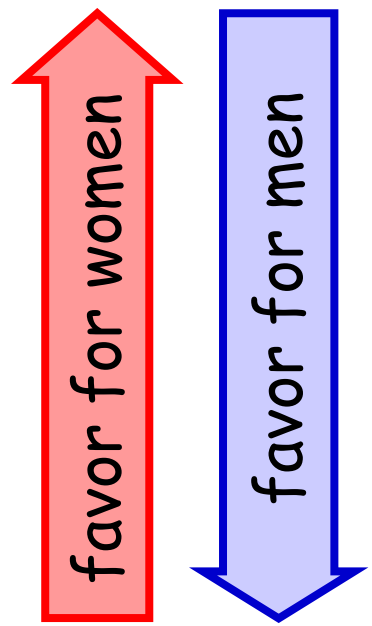
安定マッチングのなす分配束



(Hasse 図)

b. Stable matchings (from men's view)

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8
m_1	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**4**	**2**	**4**
m_2	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**1**	**1**
m_3	**3**	**3**	**4**	**4**	**4**	**2**	**4**	**2**
m_4	**4**	**4**	**3**	**3**	**5**	**3**	**5**	**5**
m_5	**5**	**5**	**5**	**5**	**3**	**5**	**3**	**3**



3.2. メディアン安定マッチング

[Teo & Sethuraman '98]

不思議な性質

安定マッチングの公平性

Object: (各人にとって) より好ましい相手,
Subject: 安定マッチング.

Observation: 利害

- 同性間: 協調可能.
- 異性間: 完全に逆転.

Proposition: "権利"
安定マッチングでの "相手"の出現回数.

"権利" = "相手"の出現確率
(安定マッチングを一様ランダム生成)

b. Stable matchings (from men's view)

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8
m_1	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**4**	**2**	**4**
m_2	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**1**	**1**
m_3	**3**	**3**	**4**	**4**	**4**	**2**	**4**	**2**
m_4	**4**	**4**	**3**	**3**	**5**	**3**	**5**	**5**
m_5	**5**	**5**	**5**	**5**	**3**	**5**	**3**	**3**

一般化メディアン安定マッチング (GMSM) [Teo & Sethuraman '98]

a. Preference list

Men's lists

m_1	w_1	w_2	w_4	w_3	w_5
m_2	w_2	w_1	w_3	w_4	w_5
m_3	w_3	w_4	w_2	w_5	w_1
m_4	w_4	w_3	w_5	w_1	w_2
m_5	w_5	w_3	w_1	w_2	w_4

Women's lists

w_1	m_2	m_1	m_3	m_4	m_5
w_2	m_3	m_1	m_2	m_4	m_5
w_3	m_5	m_4	m_3	m_2	m_1
w_4	m_1	m_3	m_4	m_5	m_2
w_5	m_4	m_5	m_1	m_2	m_3

b. Stable matchings (from men's view)

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8
m_1	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**4**	**2**	**4**
m_2	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**1**	**1**
m_3	**3**	**3**	**4**	**4**	**4**	**2**	**4**	**2**
m_4	**4**	**4**	**3**	**3**	**5**	**3**	**5**	**5**
m_5	**5**	**5**	**5**	**5**	**3**	**5**	**3**	**3**

arrange each row, ***independently***

c. GMSMs (since men)

	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8
m_1	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**	**2**	**4**	**4**
m_2	**2**	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
m_3	**3**	**3**	**4**	**4**	**4**	**4**	**2**	**2**
m_4	**4**	**4**	**3**	**3**	**3**	**5**	**5**	**5**
m_5	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**3**	**3**	**3**

$\underbrace{\alpha_1\ \alpha_2}_{\mu_1}\ \underbrace{\alpha_3}_{\mu_3}\ \underbrace{\alpha_4\ \alpha_5}_{\mu_4}\ \underbrace{\alpha_6}_{\mu_7}\ \underbrace{\alpha_7\ \alpha_8}_{\mu_8}$

定理 [Teo & Sethuraman '98]

α_i は安定マッチング.

GMSM since women

[Teo & Sethuraman '98]

a. Preference list

Men's lists

m_1	w_1	w_2	w_4	w_3	w_5
m_2	w_2	w_1	w_3	w_4	w_5
m_3	w_3	w_4	w_2	w_5	w_1
m_4	w_4	w_3	w_5	w_1	w_2
m_5	w_5	w_3	w_1	w_2	w_4

Women's lists

w_1	m_2	m_1	m_3	m_4	m_5
w_2	m_3	m_1	m_2	m_4	m_5
w_3	m_5	m_4	m_3	m_2	m_1
w_4	m_1	m_3	m_4	m_5	m_2
w_5	m_4	m_5	m_1	m_2	m_3

b. Stable matchings (from women's view)

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8
w_1	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**	**2**	**2**
w_2	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**	**3**	**1**	**3**
w_3	**3**	**3**	**4**	**4**	**5**	**4**	**5**	**5**
w_4	**4**	**4**	**3**	**3**	**3**	**1**	**3**	**1**
w_5	**5**	**5**	**5**	**5**	**4**	**5**	**4**	**4**

arrange each row, **independently**

c. GMSMs (since women)

w_1	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**
w_2	**3**	**3**	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**	**2**
w_3	**5**	**5**	**5**	**4**	**4**	**4**	**3**	**3**
w_4	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	**3**	**4**	**4**
w_5	**4**	**4**	**4**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8

$$\underbrace{\beta_1 \quad \beta_2}_{\mu_8} \quad \underbrace{\beta_3}_{\mu_7} \quad \underbrace{\beta_4 \quad \beta_5}_{\mu_4} \quad \underbrace{\beta_6}_{\mu_3} \quad \underbrace{\beta_7 \quad \beta_8}_{\mu_1}$$

定理 [Teo & Sethuraman '98]

β_i は安定マッチング.

男性のGMSM vs 女性のGMSM

b. Stable matchings (from men's view)

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8
m_1	1	2	1	2	1	4	2	4
m_2	2	1	2	1	2	1	1	1
m_3	3	3	4	4	4	2	4	2
m_4	4	4	3	3	5	3	5	5
m_5	5	5	5	5	3	5	3	3

arrange each row, **independently**

c. GMSMs (since men)

m_1	1	1	1	2	2	2	4	4
m_2	2	2	2	1	1	1	1	1
m_3	3	3	4	4	4	4	2	2
m_4	4	4	3	3	3	5	5	5
m_5	5	5	5	5	5	3	3	3
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8

μ_1 μ_3 μ_4 μ_7 μ_8

b. Stable matchings (from women's view)

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8
w_1	1	2	1	2	1	2	2	2
w_2	2	1	2	1	2	3	1	3
w_3	3	3	4	4	5	4	5	5
w_4	4	4	3	3	3	1	3	1
w_5	5	5	5	5	4	5	4	4

arrange each row, **independently**

c. GMSMs (since women)

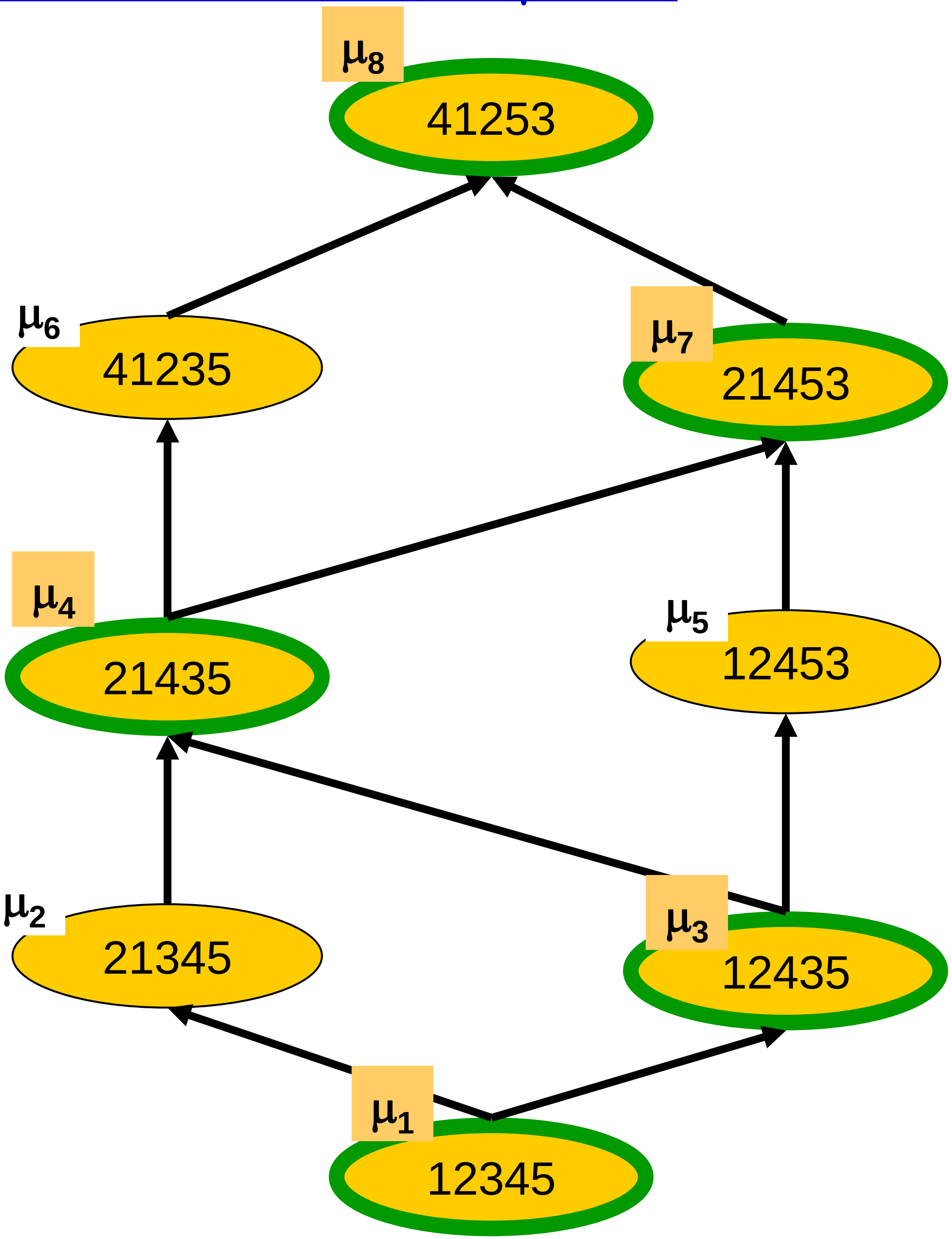
w_1	2	2	2	2	2	1	1	1
w_2	3	3	1	1	1	2	2	2
w_3	5	5	5	4	4	4	3	3
w_4	1	1	3	3	3	3	4	4
w_5	4	4	4	5	5	5	5	5
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8

μ_8 μ_7 μ_4 μ_3 μ_1

定理 [Teo & Sethuraman '98]

$$\alpha_i = \beta_{N-i} .$$

GMSMとレベルイデμアル



c. GMSMs (since men)

m_1	1	1	1	2	2	2	4	4
m_2	2	2	2	1	1	1	1	1
m_3	3	3	4	4	4	4	2	2
m_4	4	4	3	3	3	5	5	5
m_5	5	5	5	5	5	3	3	3
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8

$$\underbrace{\alpha_1\ \alpha_2}_{\mu_1}\ \underbrace{\alpha_3}_{\mu_3}\ \underbrace{\alpha_4\ \alpha_5}_{\mu_4}\ \underbrace{\alpha_6}_{\mu_7}\ \underbrace{\alpha_7\ \alpha_8}_{\mu_8}$$

c. GMSMs (since women)

w_1	2	2	2	2	2	1	1	1
w_2	3	3	1	1	1	2	2	2
w_3	5	5	5	4	4	4	3	3
w_4	1	1	3	3	3	3	4	4
w_5	4	4	4	5	5	5	5	5
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8

$$\underbrace{\beta_1\ \beta_2}_{\mu_8}\ \underbrace{\beta_3}_{\mu_7}\ \underbrace{\beta_4\ \beta_5}_{\mu_4}\ \underbrace{\beta_6}_{\mu_3}\ \underbrace{\beta_7\ \beta_8}_{\mu_1}$$

安定マッチングの公平性

Object: (各人にとって) より好ましい相手,
Subject: 安定マッチング.

Observation: 利害
- 同性間: 協調可能.
- 異性間: 完全に逆転.

"権利" = "相手"の出現確率
(安定マッチングを一様ランダム生成)

Proposition: "権利"
安定マッチングでの "相手"の出現回数.

Solution: GMSM
全員が権利を同数譲歩.

$\alpha_{N/2}$: メディアン安定マッチング

どうやって計算しよう…

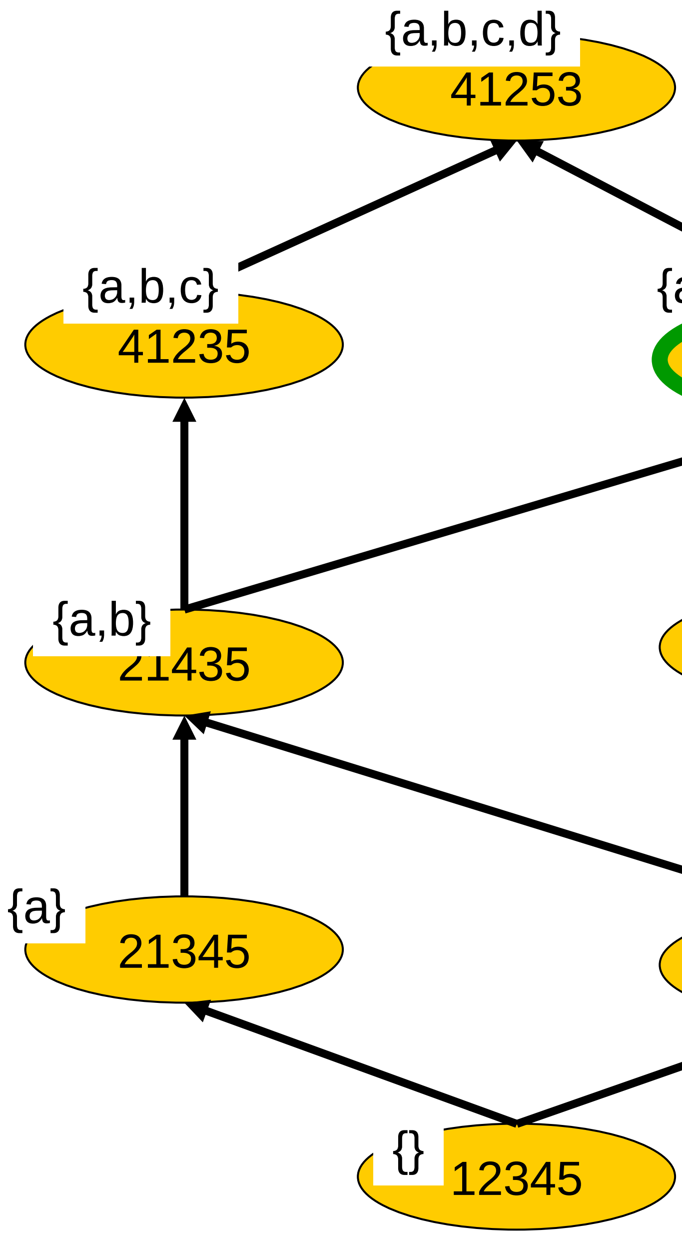
b. Stable matchings (from men's view)

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8
m_1	1	2	1	2	1	4	2	4
m_2	2	1	2	1	2	1	1	1
m_3	3	3	4	4	4	2	4	2
m_4	4	4	3	3	5	3	5	5
m_5	5	5	5	5	3	5	3	3

3.3. メディアン安定マッチングを求める・抄

- Birkhoffの表現定理 (rotation poset)
- Level Ideal問題
- イデアルのサンプリングとメディアン安定マッチング

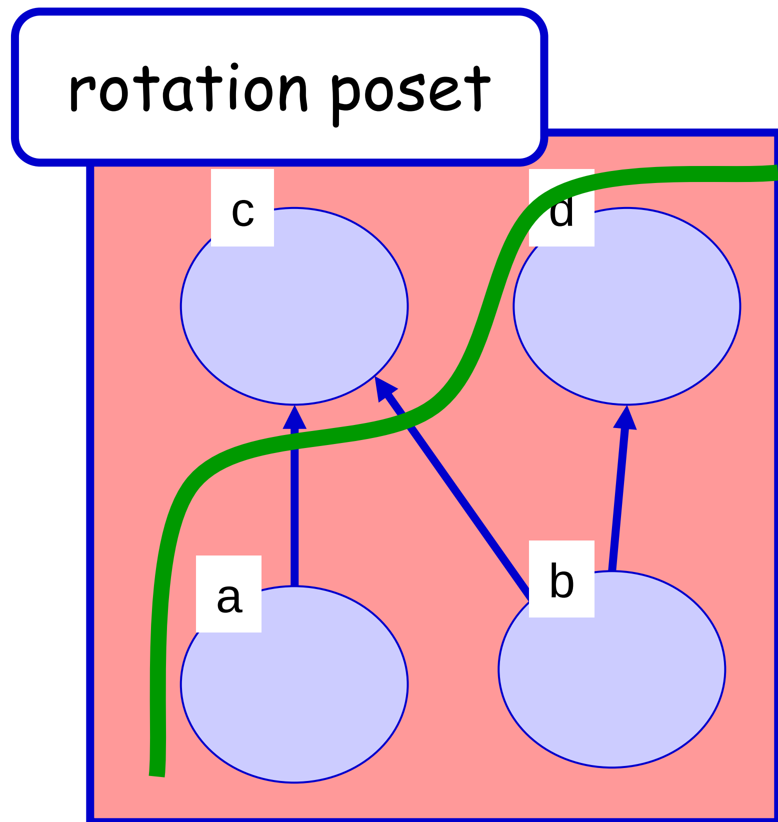
Birkhoffの表現定理



安定マッチングの個数は
人数(2n)に対して**指数的**. (∃例: $|\mathcal{M}| = 2^{n-1}$)

poset の **ideal** による
コンパクトな表現

cf. Birkhoffの表現定理



用語
✓ **poset**
✓ イデアル

有限 poset (partially ordered set: 半順序集合)

例

poset P = {a,b,c,d}
- a < c
- b < c
- b < d

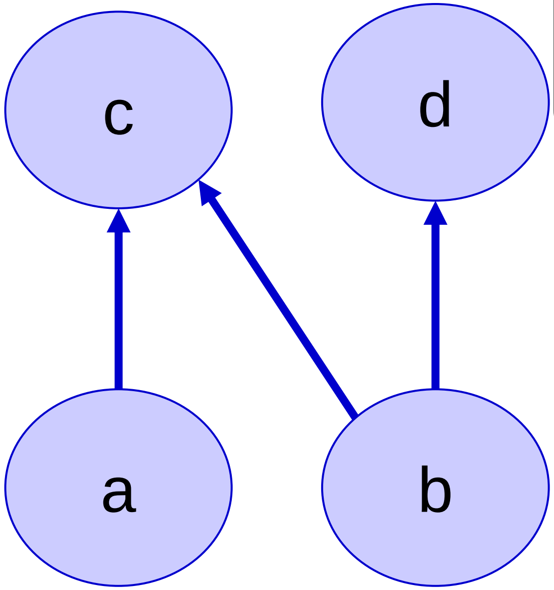
半順序

- 大小(or等号)関係の無いペアを許す
- 3すくみは存在しない

cf. DAG (directed acyclic graph)

= 有向サイクルをもたない有向グラフ

- 有向パスが順序に対応
- 有向パスの無いペアには順序関係が無い



Hasse図

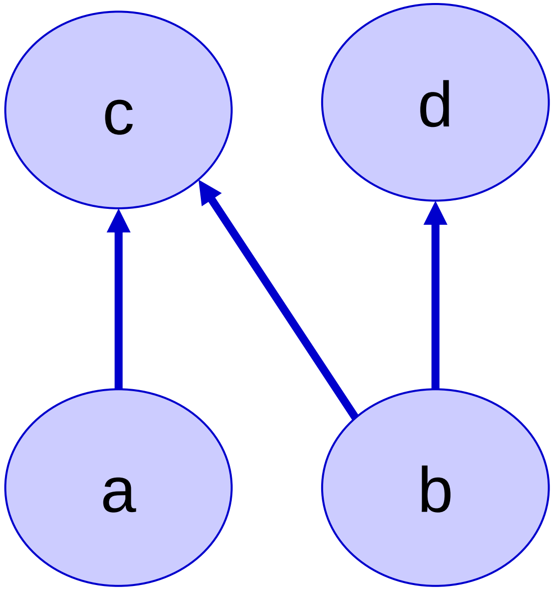
poset (半順序集合) とイデアル

例

poset P = {a,b,c,d}
- a < c
- b < c
- b < d

$X\ (\subseteq P)$ が poset P の**イデアル**
$\Leftrightarrow [x \in X,\ y \le x \Rightarrow y \in X\ ]$を満たす

(イデアルの) 各要素にとって, 自身より "小さい" 要素は全てイデアルに含まれている



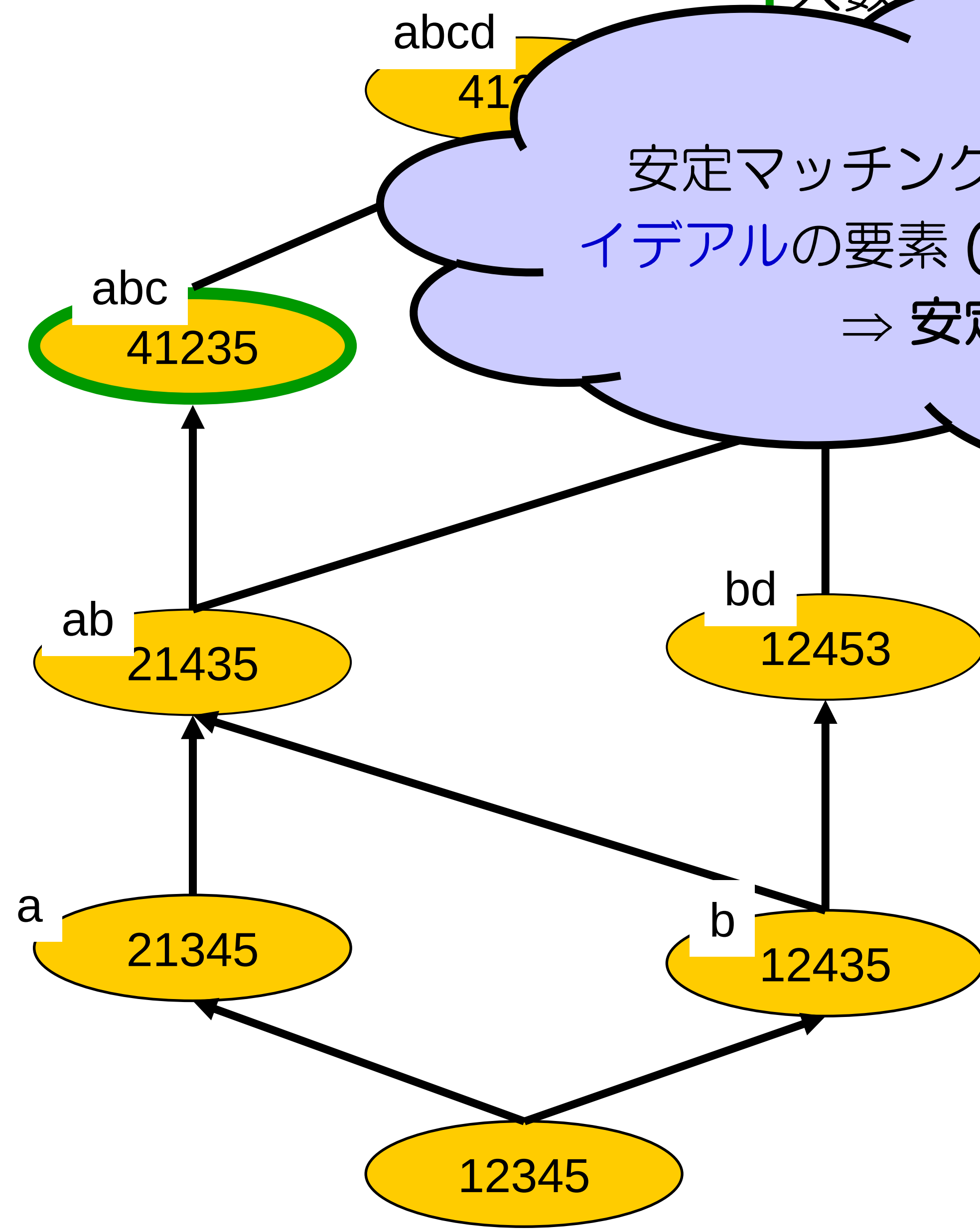
Hasse図

rotation poset

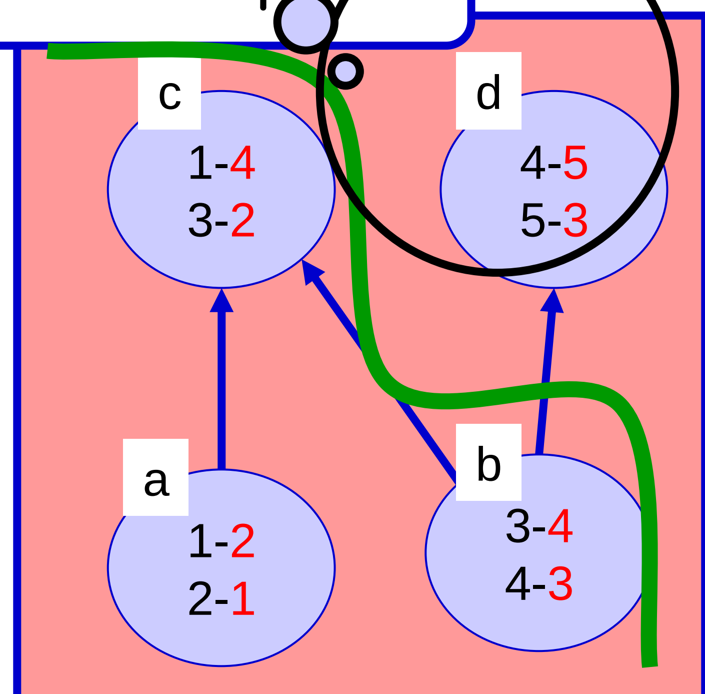
安定マッチングの個数は
人数(2n)に対して ... 2^{n-1})

安定マッチング 12345 (= man-opt)に
イデアルの要素 (= **rotation**) を(順次)適用
⇒ 安定マッチング

... 表現定理



rotation poset



レベルイデアル

定理 [Nemoto00, Cheng08]

安定結婚問題の入力に対して,

R: rotation poset,

S_i: poset R の i 番目の レベルイデアル **(LI)**,

i 番目のGMSM = S_i に対応する安定マッチング.

???

よくわからないけど、

どうやら…

(i番目の) **GMSM**を見つける問題 = (i番目の) **LI**を見つける問題

✓ poset
✓ イデアル
✓ レベルイデアル (LI)

レベルイデアル探索問題

問題: レベルイデアル.
Find: (i 番目の) LI.

$\mathcal{D}(P)$:P のイデアル全体の集合

$\left(N \stackrel{\text{def.}}{=} |\mathcal{D}(P)|\right)$

$X\ (\subseteq P)$ が poset P のイデアル
$\Leftrightarrow [x \in X,\ y \leq x \Rightarrow y \in X\ ]$を満たす

定義 $g : P \to \mathbb{Z}_{++}$

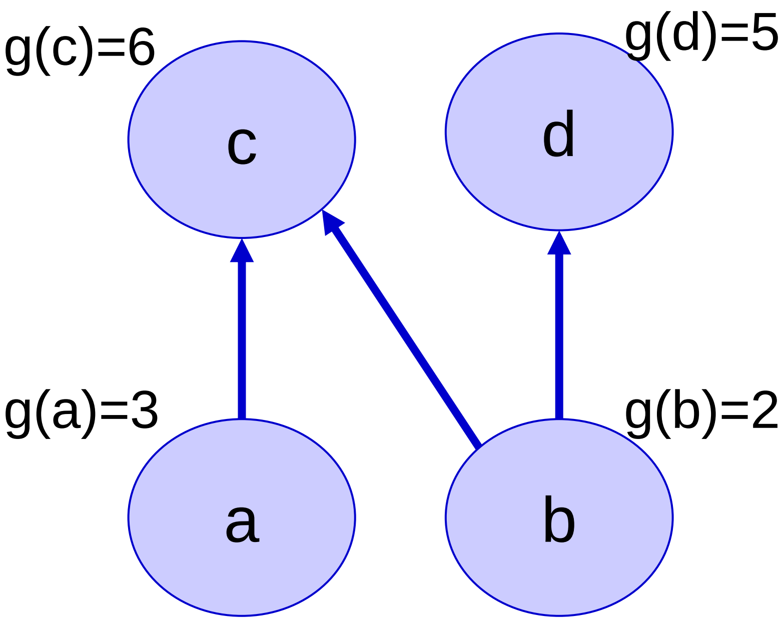
$$g(x) \stackrel{\text{def.}}{=} |\{X \in \mathcal{D}(P) \mid x \notin X\}|$$
$$= |\mathcal{D}(P \setminus U(x))|$$

$\left(U(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \{y \in P \mid y \succeq x\}\right)$

定義 $S_i \subseteq P\ (i \in \{1, \ldots, N\})$

$$S_i \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in P \mid g(x) < i\}$$

(i 番目の)レベルイデアル

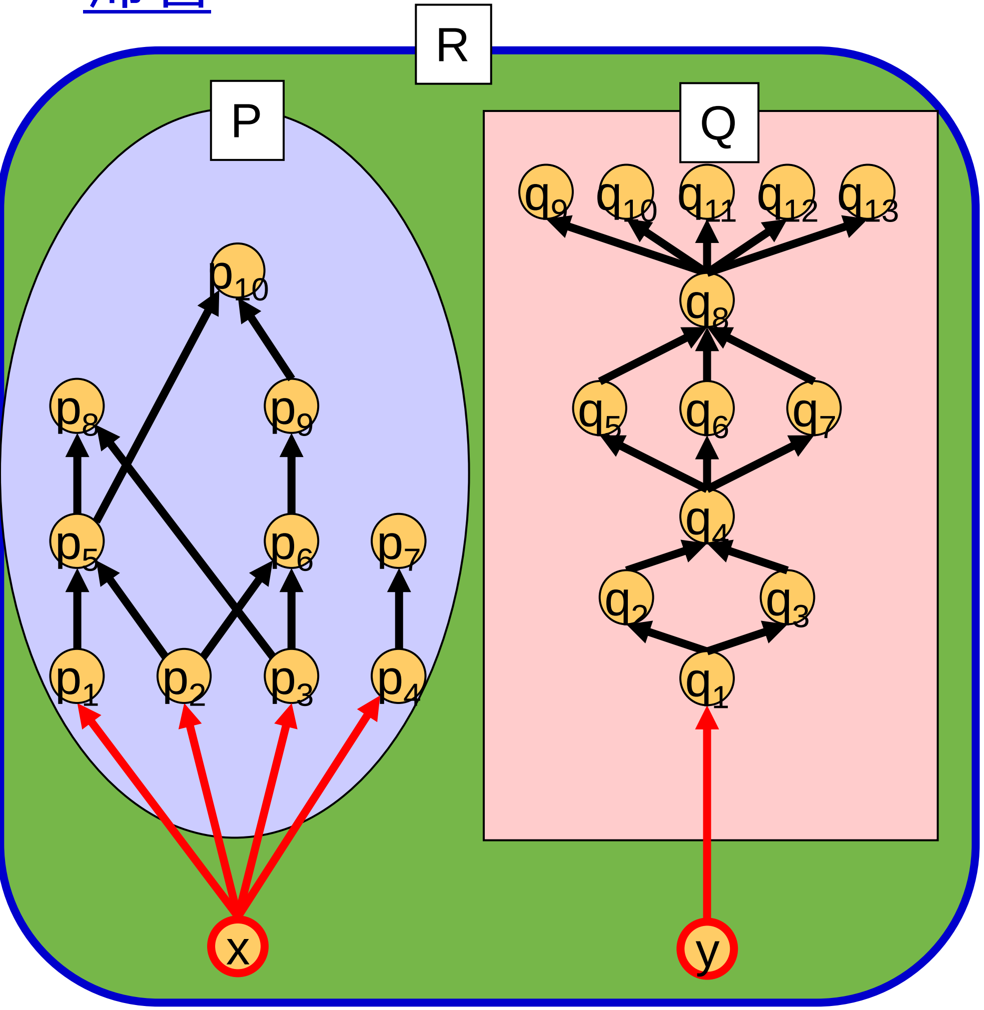


Hasse図

帰着

#P困難

[Provan Ball '83]



COUNTING IDEAL

Given: poset P,

正整数 K,

Query: |D(P)| < K?

$$\{y\} \in \mathcal{F}(R)?$$

$$\begin{pmatrix} g(y) = |\mathcal{D}(P)| + 1 \\ g(x) = K + 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(R) &= (K+1)(\mathcal{D}(P)+1) \\ &\simeq (\mathcal{D}(P)+1)^2 \end{aligned}$$

補題

正整数 K に対して,

|D(Q)| = K となる poset Q を構成可能

(poly.(ln K) 時間, サイズ)

本研究の成果

定理 [Cheng '08]

$i = \Omega(N)$ の時，「i 番目の LI は要素 e を含むか？」は**#P困難**.

定理 [Cheng '08]

$i = O(\log |P|)$ の時，i 番目の LI は**多項式時間**で見つかる.

NP問題？

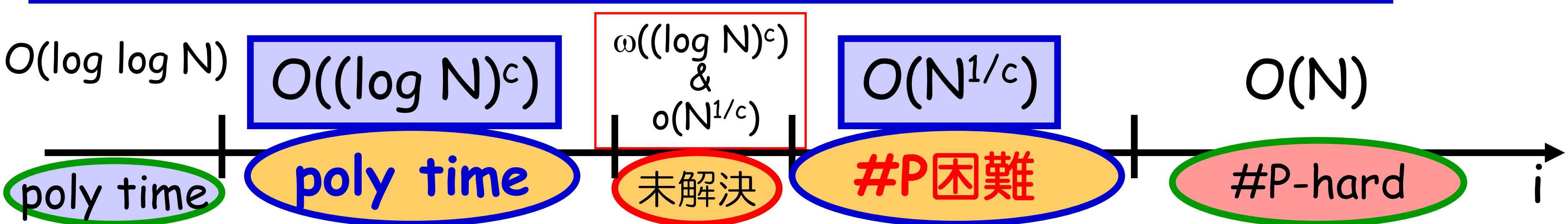
定理

「イデアル S は i 番目の LI か？」は,

$i = O(N^{1/c})$の場合でも **#P困難**. 但し $c \geq 1$ は任意の定数.

定理

$i = O(|P|^c)$ の時, i 番目の LI は**多項式時間**で見つかる.



素朴な乱択アルゴリズム

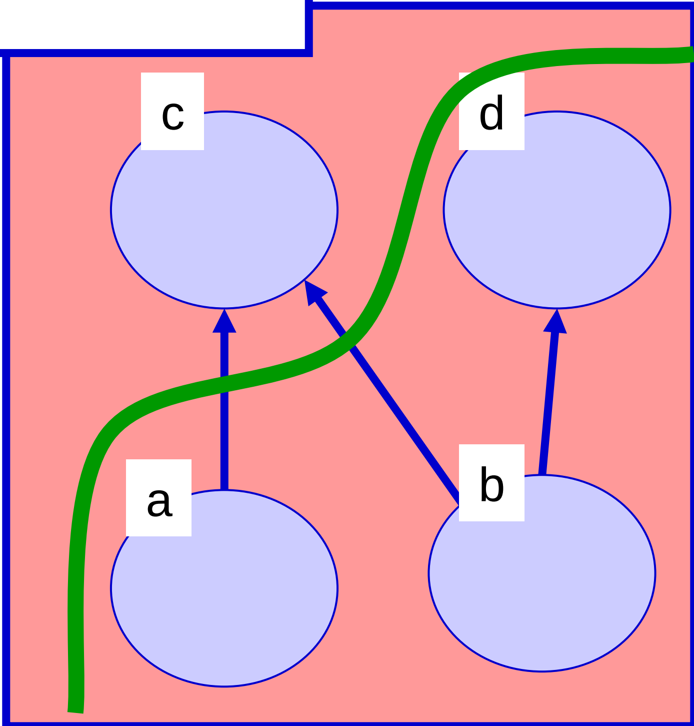
cf. [Propp & Wilson '96]

Oracle 1
イデアルの近似一様ランダム生成

定理 1
多項式時間でイデアル S を出力し，近似解Sは

$$\Pr\left[S_{\lfloor(\lambda-\varepsilon)N\rfloor} \subseteq S \subseteq S_{\lceil(\lambda+\varepsilon)N\rceil}\right] \geq 1-\delta$$

を満たす．



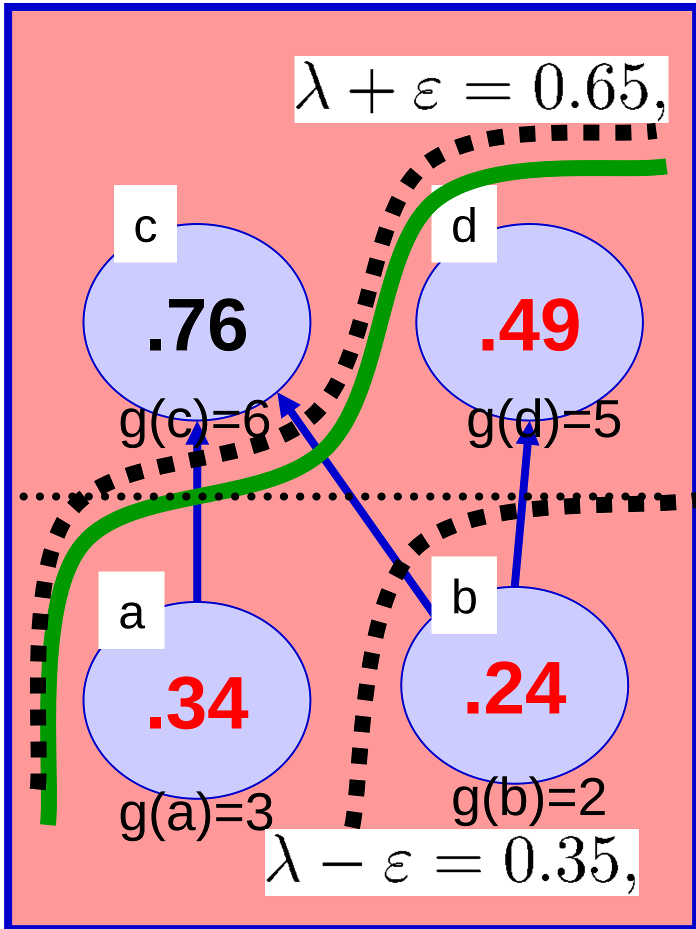
アルゴリズムの精度保証

0. Set $Z(P) := 0$ $(p \in P)$.
1. 以下を T 回繰り返す;

   $X \in \mathcal{D}(P)$ を一様ランダム生成.

   $\forall p \in P$, if $p \notin X$ then $Z(p) + +$.
2. Output $S = \{p \in P \mid Z(p)/T < \lambda\}$.

Ex. $\lambda = 0.5$, $T = 100$



定理

$T = \lceil -12\varepsilon^{-2} \ln(\delta/|P|) \rceil$ とすると,

出力されるイデアル S は

$$\Pr\left[S_{\lfloor(\lambda-\varepsilon)N\rfloor} \subseteq S \subseteq S_{\lceil(\lambda+\varepsilon)N\rceil}\right] \geq 1 - \delta$$

を満たす.

素朴な乱択アルゴリズム

Oracle 1

イデアルの近似一様ランダム生成

定理 1

多項式時間でイデアル S を出力し，近似解Sは

$$\Pr\left[S_{\lfloor(\lambda-\varepsilon)N\rfloor} \subseteq S \subseteq S_{\lceil(\lambda+\varepsilon)N\rceil}\right] \geq 1-\delta$$

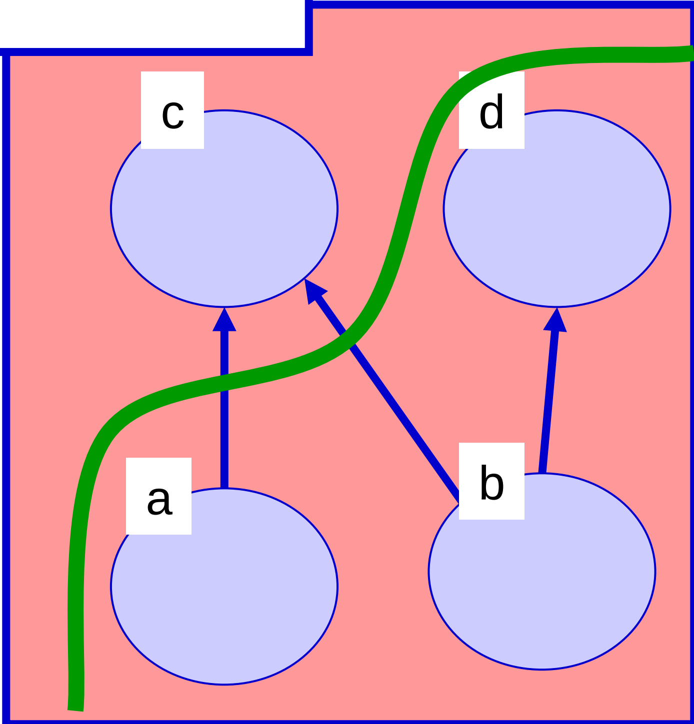
を満たす．

証明

Chernoff bound を使う．

(“近似” 一様サンプリングに注意)

Q.E.D.



計算オラクルと成果

Oracle 1

イデアルの近似一様ランダム生成

定理 1

多項式時間でイデアル S を出力し，近似解Sは

$$\Pr\left[S_{\lfloor(\lambda-\varepsilon)N\rfloor} \subseteq S \subseteq S_{\lceil(\lambda+\varepsilon)N\rceil}\right] \geq 1-\delta$$

を満たす．

Oracle 2

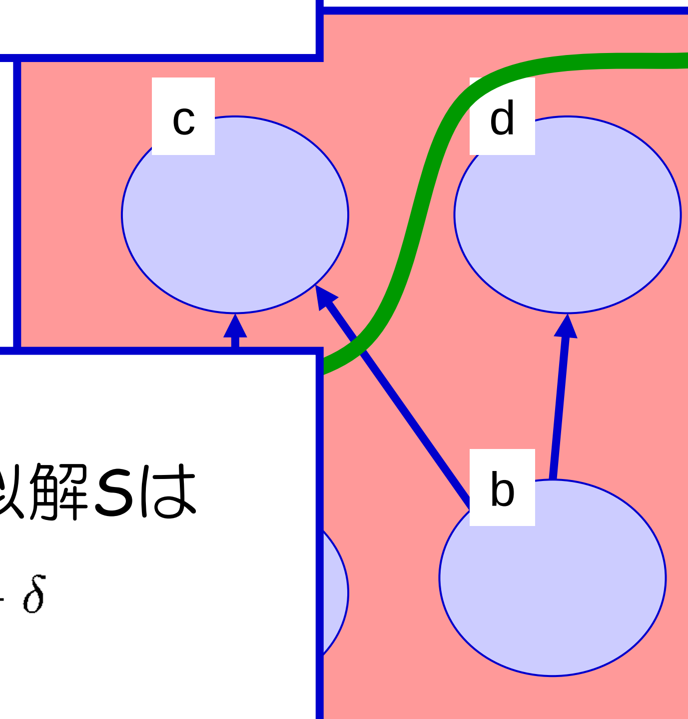
イデアルの乱択近似一様数え上げ

定理 2

多項式時間でイデアル S を出力し，近似解Sは

$$\Pr\left[S_{\lfloor(1-\varepsilon)f(N)\rfloor} \subseteq S \subseteq S_{\lceil(1+\varepsilon)f(N)\rceil}\right] \geq 1-\delta$$

を満たす．



乱択近似数え上げに基づくアルゴリズム

1. $\forall p \in P$, $g(p)$ を乱択近似計算.
2. Output $S = \{p \in P \mid \widehat{g}(p) < k\}$.

Sはイデアルとは限らない.

一工夫

定理

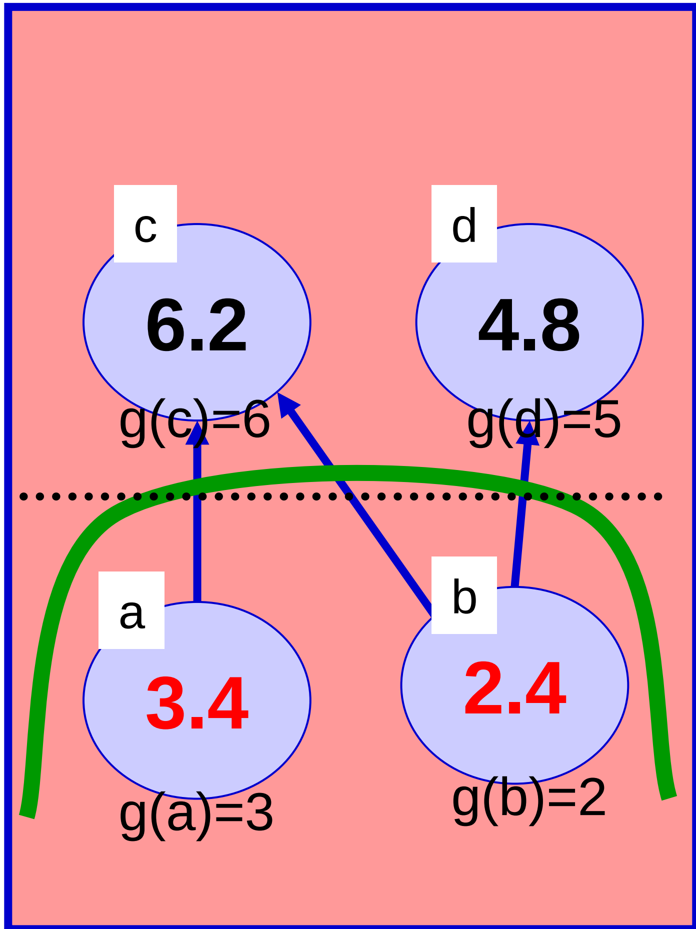
提案アルゴリズムは,

イデアル S を出力し，Sは

$$\Pr\left[S_{\lfloor(1-\varepsilon)k\rfloor} \subseteq S \subseteq S_{\lceil(1+\varepsilon)k\rceil}\right] \geq 1-\delta$$

を満たす.

Ex. $k=4$



4. 対数優モジュラ分布からのサンプリング

対数優モジュラ分布からのサンプリングは#BIS困難

命題. (イデアルの指示関数)

有限半順序集合 $\mathcal{P} = (N, \preccurlyeq)$ に対し，関数 $f\colon 2^N \to \mathbb{R}$ を

$$f(X) = |\{i \in X \mid [\exists j, j \prec i] \wedge [j \notin X]\}| \quad \left(X \in 2^N\right)$$

とする．このとき f は任意の $X \in 2^N$ に対して

$$f(X) \begin{cases} = 0 & X\text{がイデアルのとき} \\ \geq 1 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

を満たし，劣モジュラ.

$g(X) = 2^{-(n+1)f(X)} \quad \left(X \in 2^N\right)$ とすると

$$g(X) \begin{cases} = 1 & X\text{がイデアル} \\ \leq \dfrac{1}{2^{n+1}} & \text{それ以外} \end{cases}$$

を満たし，**対数優モジュラ**．ただし $n = |N|$.

もし多項式時間サンプリングできると，イデアルの数(の近似)が求まる．

⇒ **#BIS困難**

What is #BIS? #BIS is a counting problm

Prob. #BIS

Given $G = (U, V; E)$ **B**ipartite graph.

Count the number of **I**ndependent **S**ets, where

$X \subseteq U \cup V$ is an *independent set* if $\{x, y\} \notin E$ for any $x, y \in X$.

#BIS is conjectured to be located between **#SAT**-hard (no FPRAS unless RP=NP) and **FPRAS**able under **AP-reduction**.

Approximation-preserving reduction

M. E. Dyer, L. A. Goldberg, M. Jerrum, An approximation trichotomy for Boolean #CSP, J. Comput. Syst. Sci., 76(3-4): 267-277, 2010.

"hard"

#SAT (No FPRAS unless RP≠NP)

#BIS #IDEALS, #StableMatchings

FPRAS/FPTAS
(incld. #BipMatch, Ising, #0-1Knapsack,etc.)

"easy"

Classification of #P-hard problems

Fully **P**olynomial-time **R**andomized **A**pproximation **S**cheme

What is #IDEALS?

Prob. #BIS

Given $G = (U, V; E)$ **B**ipartite graph.

Count the number of **I**ndependent **S**ets, where

$X \subseteq U \cup V$ is an *independent set* if $\{x, y\} \notin E$ for any $x, y \in X$.

Prob. #IDEALS

Given $\mathcal{P} = (N, \preccurlyeq)$ partially ordered set (poset).

Count the number of ideals, where

$X \subseteq N$ is an *ideal* if $x \in X$ and $y \preccurlyeq x$ then $y \in X$.

Thm.

#BIS has an FPRAS iff **#IDEALS** has an FPRAS.

Simply we say
"#IDEALS is #BIS-hard"

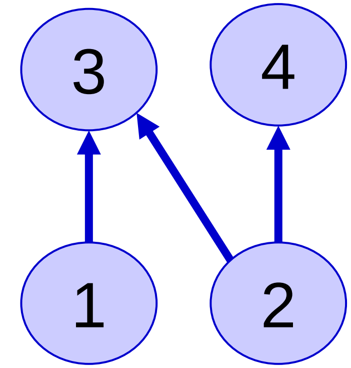
M. E. Dyer, L. A. Goldberg, C. S. Greenhill, M. Jerrum,
The relative complexity of approximate counting problems, Algorithmica 38(3), 471-500, 2004

Prob. #IDEALS

Given $\mathcal{P} = (N, \preccurlyeq)$ partially ordered set (poset).

Count the number of ideals, where

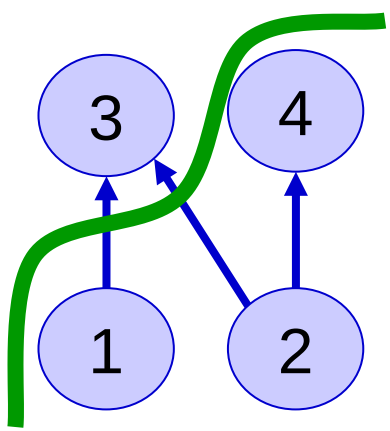
$X \subseteq N$ is an *ideal* if $x \in X$ and $y \preccurlyeq x$ then $y \in X$.



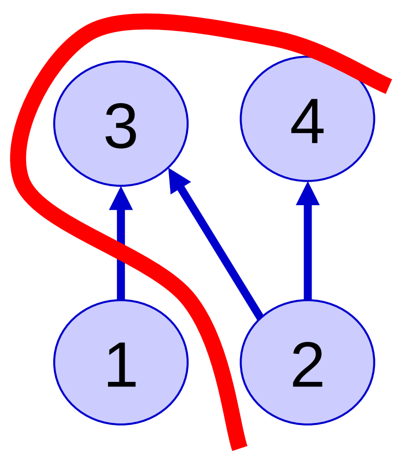
$\mathcal{P} = (\{1,2,3,4\}, \preccurlyeq)$

Let $\mathcal{J}(\mathcal{P}) = \{X \subseteq V \mid X \text{ is an ideal of } \mathcal{P}\}$.

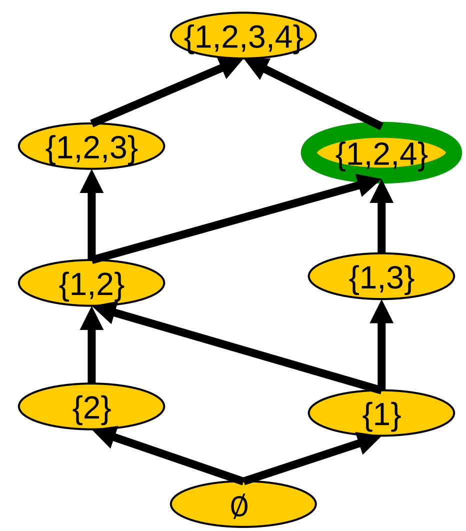
- ✓ $\mathcal{J}(\mathcal{P})$ forms a **distributive lattice** w.r.t. ∪ and ∩.
- ✓ Any finite **distributive lattice** is isomorphic to the set family of ideals of a poset (**Birkhoff's representation theorem**).



An ideal



Not an ideal



$\mathcal{J}(\mathcal{P})$

Sampling from a log-supermodular distr. is #BIS-hard

Assuming an efficient sampler from log-supermodular distribution, we compute $C = \sum_{X \in 2^N} g(X)$ for log-supermodular fnc. $g \colon 2^N \to \mathbb{R}_{>0}$.

- ✓ Let $g_{\{n\}} \colon 2^{N \setminus \{n\}} \to \mathbb{R}$ be defined by $g_{\{n\}}(X) = g(X)$ for $X \in 2^{N \setminus \{n\}}$.
  Remark that $g_{\{n\}}$ is log-supermodular, again (called “restriction”).
- ✓ Let $C_{\{n\}} = \sum_{X \in 2^{N \setminus \{n\}}} g(X)$, then $C = \frac{C}{C_{\{n\}}} C_{\{n\}}$ holds.
- ✓ Let $\pi(X) = \frac{1}{C} g(X)$ for $X \in 2^N$, then $\pi\left(\{X \in 2^N \middle| n \notin X\}\right) = \frac{C_{\{n\}}}{C}$.
- ✓ This means that we can approximate $\frac{C_{\{n\}}}{C}$ by the Monte Carlo w/ samples from π over 2^N.
- ✓ Since $C_{\{n\}}$ is a partition function of log-supermodular distribution, recursively we can compute C as $C = \frac{C_{\{n\}}}{C} \frac{C_{\{n-1,n\}}}{C_{\{n\}}} \cdots \frac{C_{\{2,\ldots,n\}}}{C_{\{1,\ldots,n\}}} C_{\{1,\ldots,N\}}$.

The argument is based on a standard technique using self-reducible developed by M. Jerrum, L. G. Valiant, V. V. Vazirani, Random generation of combinatorial structures from a uniform distribution, Theor. Comput. Sci., 43, 169-188, 1986.

4.2. 劣モジュラ関数の変数変換

SIAM J. DISCRETE MATH.
Vol. 34, No. 1, pp. 571–585

FINDING SUBMODULARITY HIDDEN IN SYMMETRIC DIFFERENCE*

JUNPEI NAKASHIMA†, YUKIKO YAMAUCHI†, SHUJI KIJIMA†, AND MASAFUMI YAMASHITA†

Abstract. A set function f on a finite set V is *submodular* if $f(X)+f(Y) \geq f(X \cup Y)+f(X \cap Y)$ for any pair $X, Y \subseteq V$. The *symmetric difference transformation* (*SD-transformation*) of f by a *canonical set* $S \subseteq V$ is a set function g given by $g(X) = f(X \triangle S)$ for $X \subseteq V$, where $X \triangle S = (X \setminus S) \cup (S \setminus X)$ denotes the symmetric difference between X and S. Submodularity and SD-transformations are regarded as the counterparts of convexity and affine transformations in a

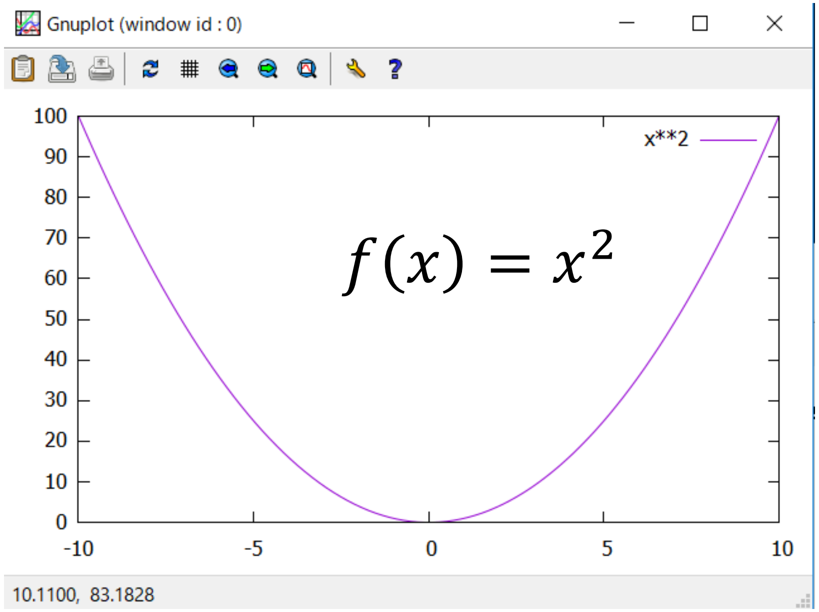
凸性はアフィン変換で保存される

定義：凸関数

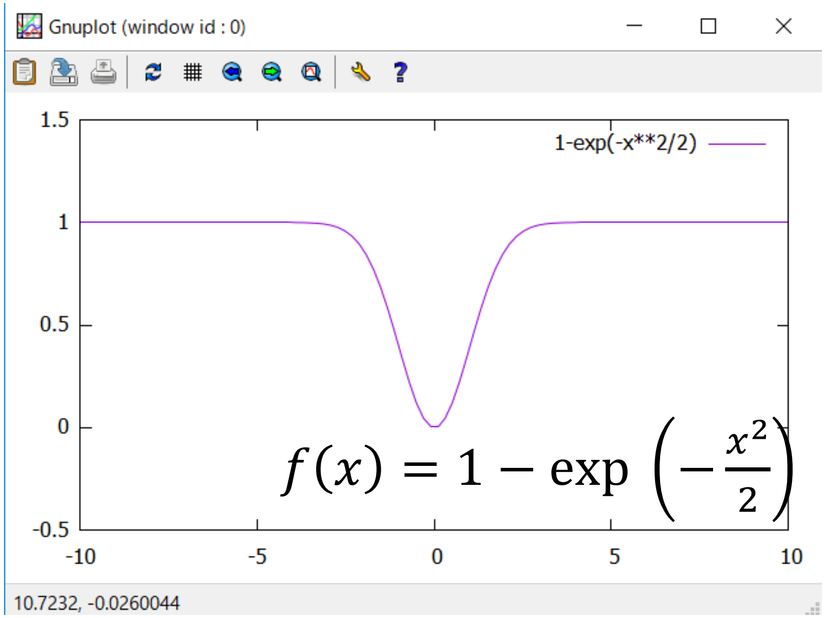
関数$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$に対し，任意の$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$と任意の$\lambda \geq 0$に対して

$$\lambda f(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{y}) \geq f(\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y})$$

が成り立つとき，fは凸関数という．



凸関数



凸ではない関数

凸性はアフィン変換で保存される

定義：凸関数

関数$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$に対し，任意の$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$と任意の$\lambda \geq 0$に対して

$$\lambda f(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{y}) \geq f(\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y})$$

が成り立つとき，fは凸関数という.

定理 cf. [Rockafellar]

$h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$はアフィン写像とする.

関数$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$**が**凸のとき$g \coloneqq f \circ h$は凸関数.

(i.e., $h = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ のとき,

$g(\boldsymbol{x}) = f(A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b})$は凸関数)

凸性はアフィン変換で保存される

定義：凸関数

関数$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$に対 … 対して

が成り …

離散関数のアナロジー？

⇒劣モジュラ関数

定理 c…

$h: \mathbb{R}^n \to$ …

関数$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ … 数.

(i.e., $h = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$: $A \in$ … $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$のとき,

$g(\boldsymbol{x}) = f(A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b})$は凸関数)

定義: 劣モジュラ

集合関数 $f:\{0,1\}^V \to \mathbb{R}$ に対して，$\Phi_f:\{0,1\}^V \times \{0,1\}^V \to \mathbb{R}$を

$$\Phi_f(X,Y) \coloneqq f(X) + f(Y) - f(X \cup Y) - f(X \cap Y)$$

とする.

- 集合関数fが劣モジュラとは，任意の$X,Y \in \{0,1\}^V$に対して $\Phi_f(X,Y) \geq 0$が成り立つこととする.

$g \coloneqq f \circ \sigma_{(1,0,0)}$の場合

定義: 対称差変換

対称差写像$\sigma_S:\{0,1\}^V \to \{0,1\}^V$ を

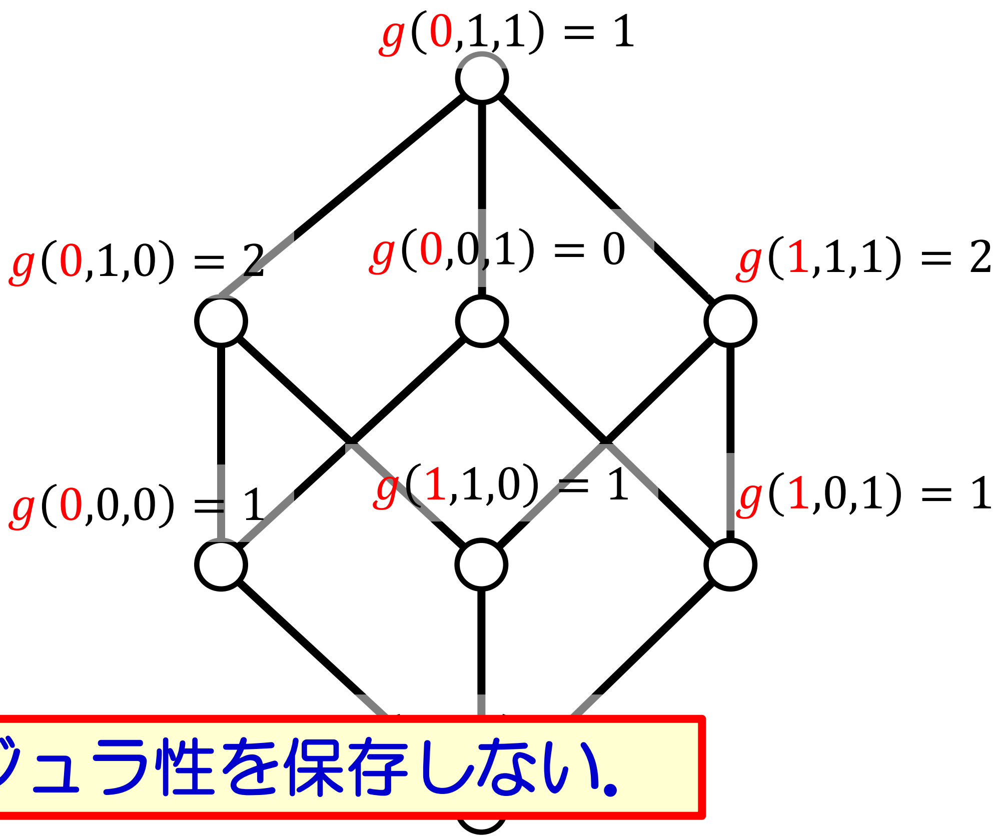
$\sigma_S(X) \coloneqq X \oplus S \ \ (X \in \{0,1\}^V)$

とする.

集合関数$g:\{0,1\}^V \to \mathbb{R}$ を

$$g \coloneqq f \circ \sigma_S$$

を S による f の**対称差変換**と呼ぶ.



一般に，対称差変換は劣モジュラ性を保存しない.

定義: 劣モジュラ

集合関数 $f: \{0,1\}^V \to \mathbb{R}$ に対して，$\Phi_f: \{0,1\}^V \times \{0,1\}^V \to \mathbb{R}$を

$$\Phi_f(X,Y) := f(X) + f(Y) - f(X \cup Y) - f(X \cap Y)$$

とする.

- 集合関数fが劣モジュラとは，任意の$X,Y \in \{0,1\}^V$に対して $\Phi_f(X,Y) \geq 0$が成り立つこととする.

$g := f \circ \sigma_{(1,0,1)}$の場合

定義: 対称差変換

対称差写像$\sigma_S: \{0,1\}^V \to \{0,1\}^V$ を

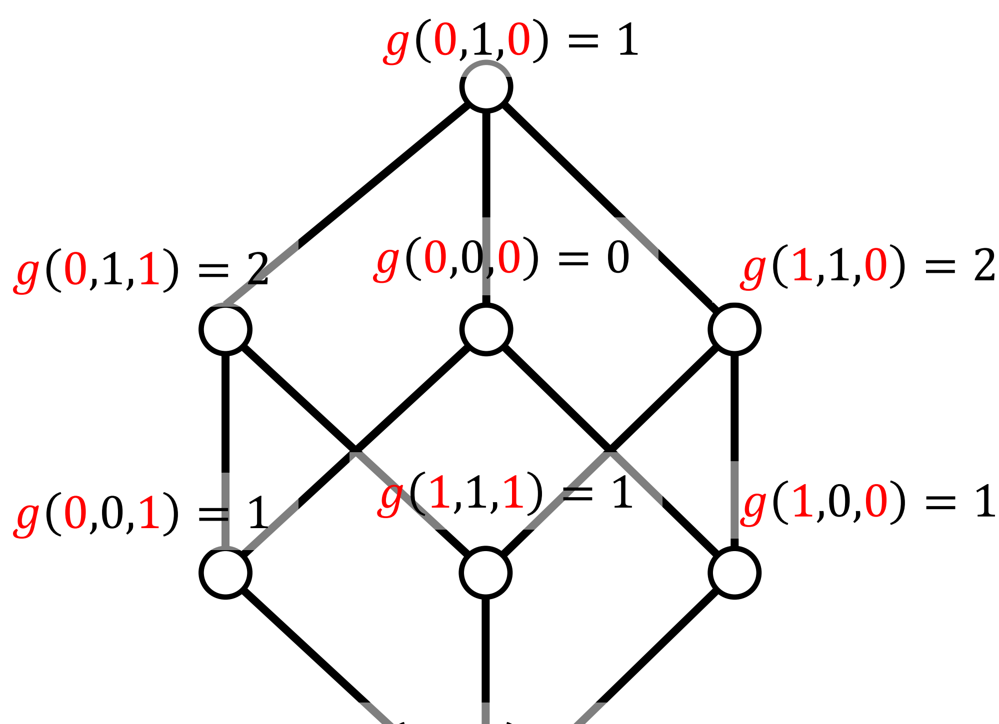
$\sigma_S(X) := X \oplus S \ \ (X \in \{0,1\}^V)$

とする.

集合関数$g: \{0,1\}^V \to \mathbb{R}$ を

$$g := f \circ \sigma_S$$

を S による f の**対称差変換**と呼ぶ.



劣モジュラ性を保存する非自明な対称差変換も存在.

定義: 劣モジュラ

集合関数 $f:\{0,1\}^V \to \mathbb{R}$ に対して，$\Phi_f:\{0,1\}^V \times \{0,1\}^V \to \mathbb{R}$を

$$\Phi_f(X,Y) \coloneqq f(X) + f(Y) - f(X \cup Y) - f(X \cap Y)$$

とする.

- 集合関数fが**劣モジュラ**とは，任意の$X, Y \in \{0,1\}^V$に対して $\Phi_f(X,Y) \geq 0$が成り立つこととする.

定義: 対称差変換

対称差写像$\sigma_S:\{0,1\}^V \to \{0,1\}^V$ を

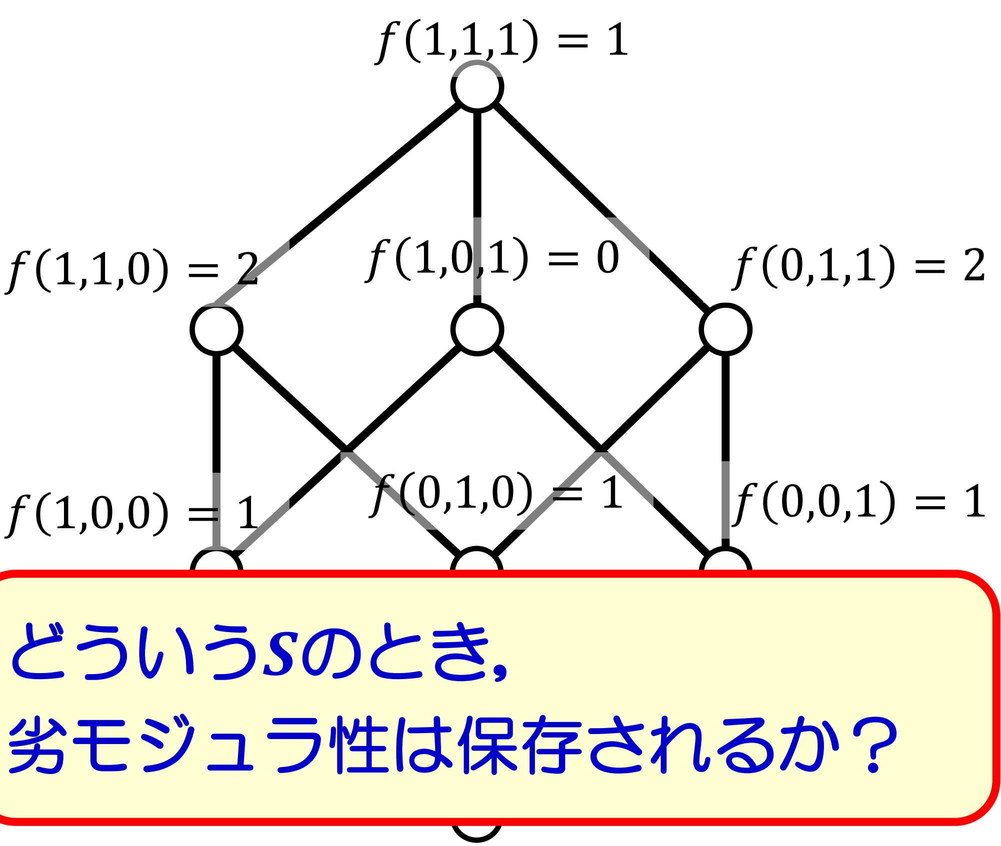
$\sigma_S(X) \coloneqq X \oplus S \ \ (X \in \{0,1\}^V)$

とする.

集合関数$g:\{0,1\}^V \to \mathbb{R}$ を

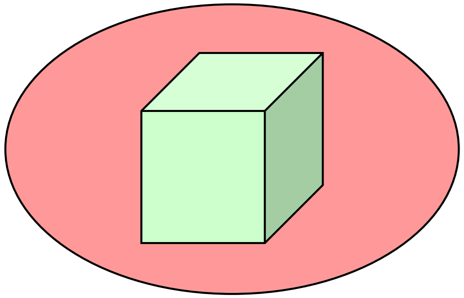
$$g \coloneqq f \circ \sigma_S$$

を Sによるf の**対称差変換**と呼ぶ.



どういうSのとき,
劣モジュラ性は保存されるか？

準備



定義: 0-1超立方体の2-face

超立方体$\{0,1\}^V$の**2-face**: $X, X \cup \{u\}, X \cup \{v\}, X \cup \{u,v\}$

超立方体$\{0,1\}^V$の2-face全体の集合を

$$\mathcal{P} \coloneqq \{\, (X, \{u,v\}) \mid u, v \in V, X \subseteq V \setminus \{u,v\} \,\}$$

で表す． $|\mathcal{P}| = 2^{|V|} \cdot \binom{|V|}{2}$が成り立つ.

定理:劣モジュラ関数 (2-face ver.) [cf. Schrijver]

任意の集合関数$f\colon \{0,1\}^V \to \mathbb{R}$に対して，$\breve{\Phi}_f\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}$を

$$\breve{\Phi}_f(X, \{u,v\}) \coloneqq f(X \cup \{u\}) + f(X \cup \{v\}) - f(X \cup \{u,v\}) - f(X)$$

と定義する.

集合関数fが劣モジュラであることの必要十分条件は

任意の$(X, \{u,v\}) \in \mathcal{P}$に対して$\breve{\Phi}_f(X, \{u,v\}) \geq 0$が成り立つこと.

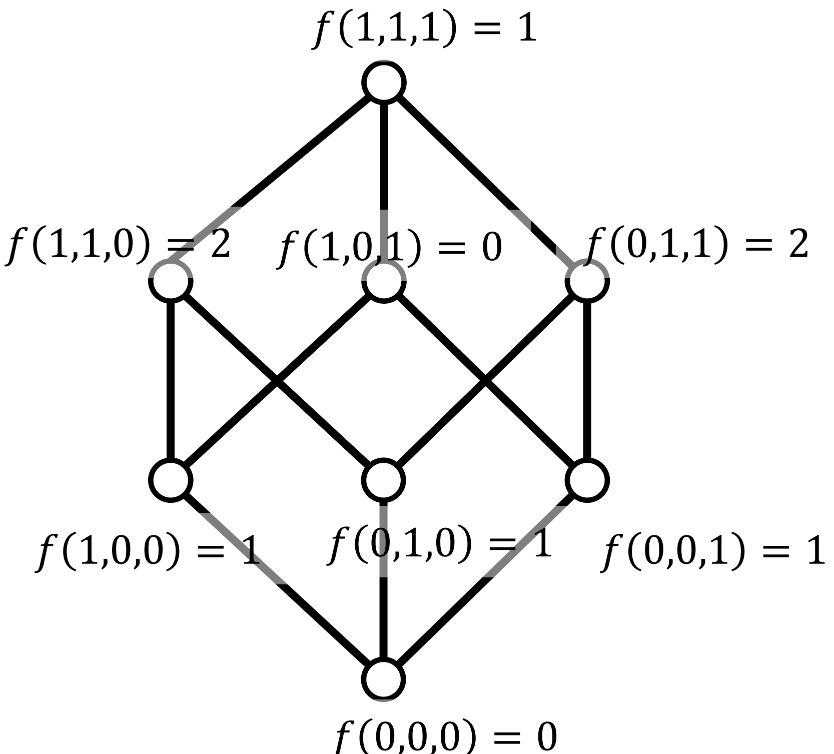
劣モジュラ性を保存する対称差変換

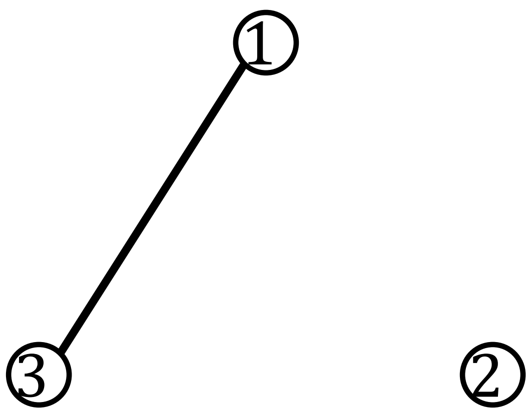
定義: 不等号グラフ(inequality graph)

集合関数 $f\colon \{0,1\}^V \to \mathbb{R}$に対して，**不等号グラフ** $G_f = (V, E_f)$を

$$E_f := \{\, \{u,v\} \mid \exists (X, \{u,v\}) \in \mathcal{P}, \breve{\Phi}_f(X, \{u,v\}) \neq 0 \,\}$$

とする．





劣モジュラ性を保存する対称差変換

定理 2

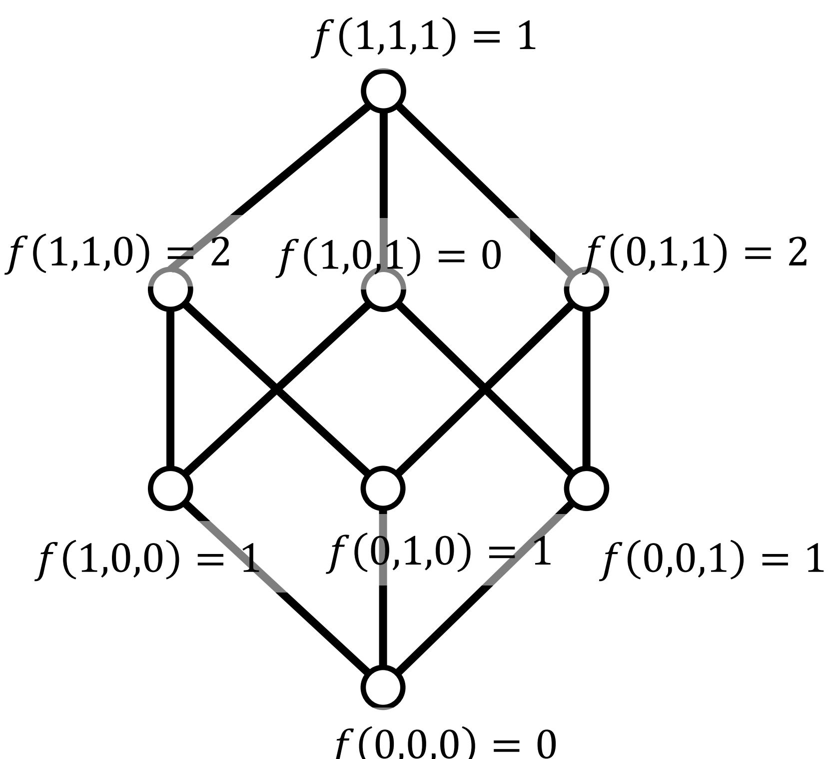
任意の$S \subseteq V$に対して，

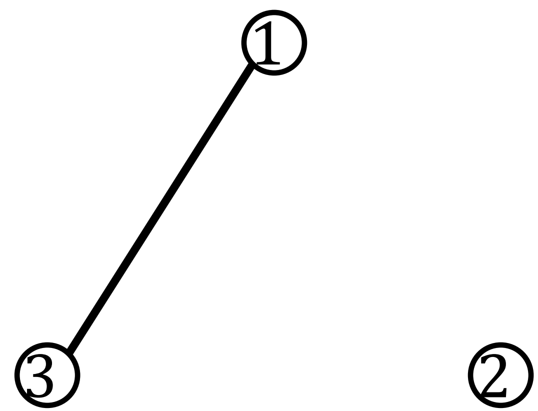
$\left[f \circ \sigma_S \text{が劣モジュラ} \Leftrightarrow S \in \mathcal{U}(f) \right]$

連結成分$U_i \subseteq V$ $(i = 1, \dots, k)$に対し，

$$\mathcal{U}(f) \coloneqq \{ \textstyle\bigcup_{i \in I} U_i \mid I \subseteq \{1, \dots, k\} \}$$

とする (kはG_f の連結成分数).





5. 最近の展開

Previou[illegible]n this conference…

- Kazuo Murota said …

  "Kijima, do you know *$M^\#$-concave set functions* form a proper subclass of submodular fns."

  (So, sampling from log-$M^\#$-convex distributions may be easier than from log-supermodular distr., as I understand)

- Both Min/Maximization of an $M^\#$-concave fn. is in P.

  (It looks like a matroid rank function, but not "monotone")

Answer: Sampling from log-$M^\#$-convex distribution is still hard.

T. Fujii and S. Kijima, Any finite distributive lattice is isomorphic to the minimizer set of an $M^\natural$-concave set function, arXiv 1903.08343, 2019.

Operations Research Letters 49 (2021) 1–4

Contents lists available at ScienceDirect

Operations Research Letters

journal homepage: www.elsevier.com/locate/orl

Every finite distributive lattice is isomorphic to the minimizer set of an M$^\natural$-concave set function

Tomohito Fujii, Shuji Kijima *

Graduate School of Information Science and Electronic Engineering, Kyushu University, Japan

A R T I C L E   I N F O

Article history:
Received 4 May 2020
Received in revised form 31 August 2020
Accepted 28 October 2020
Available online 3 November 2020

Keywords:
M$^\natural$-concave
Valuated matroid
Submodular
Distributive lattice

A B S T R A C T

$M^\natural$-concavity is a key concept in discrete convex analysis. For set functions, the class of $M^\natural$-concavity is a proper subclass of submodularity. It is a well-known fact that the set of minimizers of a submodular function forms a distributive lattice, where every finite distributive lattice is possible to appear. It is a natural question whether every finite distributive lattice appears as the minimizer set of an $M^\natural$-concave set function. This paper affirmatively answers the question.

1. Introduction

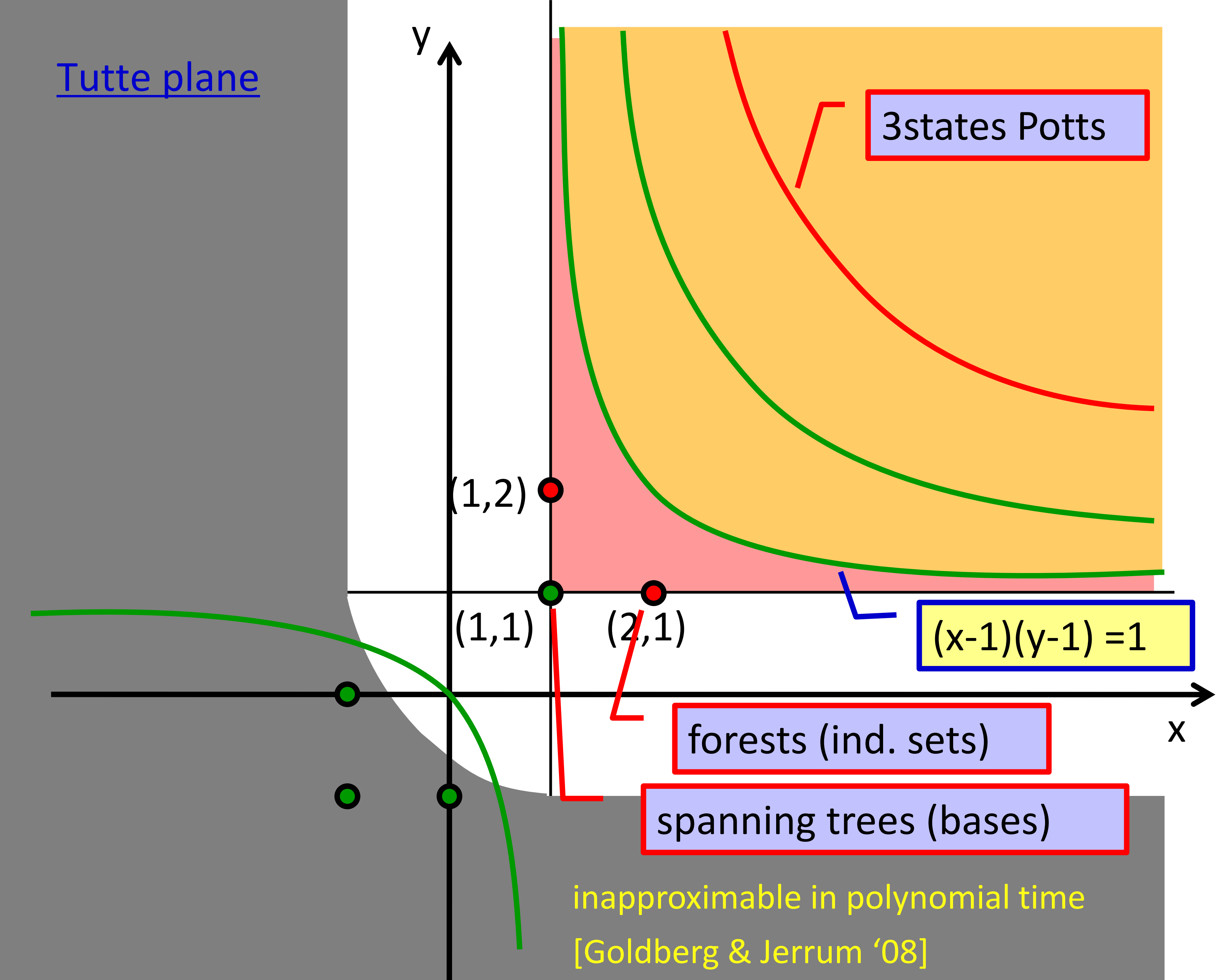
A set function $f : 2^N \to \mathbb{R}$ for a finite set N is *submodular* if

$$f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$$

Proposition 2 (*See e.g., [9]*). *Given a finite poset $\mathcal{P} = (N, \preceq)$, let $f : 2^N \to \mathbb{R}$ be defined by*

$$f(X) = |\{j \in N \setminus X : \exists i \in X \text{ such that } j \prec i\}| \quad (1)$$

Tutte plane


y
x
(1,2)
(1,1)
(2,1)
3states Potts
(x-1)(y-1) =1
forests (ind. sets)
spanning trees (bases)
inapproximable in polynomial time
[Goldberg & Jerrum '08]

Good News? Recent development

N. Anari, K. Liu, S. O. Gharan, C. Vinzant, Log-concave polynomials II: high-dimensional walks and an FPRAS for counting bases of a matroid, STOC ’19.

Provides an FPRAS for $T_G(2,1)$ ($T_M(1,1)$ and $T_M(2,1)$, in fact)

Conclusion

For efficient sampling from an arbitrary log-supermodular distribution, #BIS needs to have an FPRAS.

Some people conjecture that #BIS is located between #SAT (no FPRAS, in general) and FPRASable.

✓ Bad News: sampling from log-$M^{\#}$-concave distribution is still #BIS-hard.

✓ Good News: #BIS (#IDEALS, precisely) is restricted to log-$M^{\#}$-concave distribution, from log-supermodular distribution.

まとめ

最適化問題を解きたい.
何か良いアルゴリズムありませんか？

- アルゴリズム設計と「帰着」
  - ✓ 良いアルゴリズムは「数学構造」に従う.
    - ➢ ネットワークフローへの帰着を目指す.
    - ➢ 組合せ最適化はたいていNP困難.
- メディアン安定結婚問題のご紹介
  - ✓ 分配束
- 対数優モジュラ分布のご紹介
  - ✓ 離散凸

Talk plan

1. 導入: 現代のアルゴリズム設計論 (15分)
    - 帰着
    - 対数優モジュラ
2. 安定マッチング (15分)
    - Gale Shapleyアルゴリズム
    - 「素朴なアルゴリズム」
3. 公平な安定マッチング (15分)
    - Median property
    - 分配束とアルゴリズム
4. 劣モジュラ関数の変数変換 (15分)
5. 最近の展開

[1] Shuji Kijima and Toshio Nemoto, On randomized approximation for finding a level ideal of a poset and the generalized median stable matchings, Mathematics of Operations Research, 37:2 (May 2012), 356--371.

[2] Junpei Nakashima, Yukiko Yamauchi, Shuji Kijima and Masafumi Yamashita, Finding submodularity hidden in symmetric difference, SIAM Journal on Discrete Mathematics, 34:1 (2020), 571--585.

[3] Tomohito Fujii and Shuji Kijima, Every finite distributive lattice is isomorphic to the minimizer set of an M♮-concave set function, Operations Research Letters, 49:1 (January 2021), 1--4.

The end

Thank you for the attention.