

非推移的サイコロのはなし

盧 尚, *来嶋 秀治

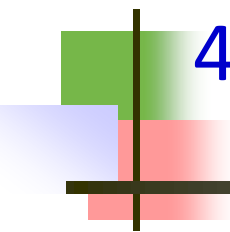
九州大学 大学院システム情報科学府

Shang Lu and Shuji Kijima,

Is There a Strongest Die in a Set of Dice with the Same Mean Pips,
Proc. **AAAI 2022.**

本発表の概要

- 小松と小野によれば、相異なる手には引き分けのない偶数手のジャンケンには**ゲーム論的に無駄な手**が必ず存在する。
- ジャンケンは勝敗が**決定的**に定まるゲームのモデルである。一方、現実世界において、勝敗は往々にして**確率的**である。本研究では勝敗が確率的に定まるゲームの素朴なモデルとして、**非推移的サイコロ**について議論する。
- ある種の公平性の条件をおき、サイコロ構築問題を考える。**最強のサイコロ**が存在するか否かを調べる？



4手ジャンケン

来嶋 秀治 (Shuji Kijima)

Dept. Informatics,
Graduate School of ISEE

ジャンケン

		Bob		
		グー	チョキ	パー
Alice	グー	--	A	B
	チョキ	B	--	A
	パー	A	B	--

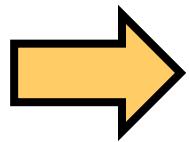
どの手を出すか?

4手ジャンケン ver.2

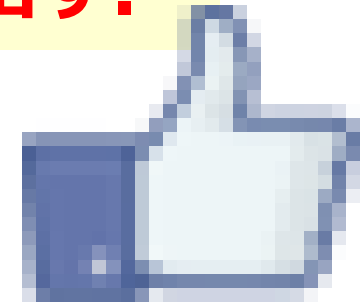
		Bob			
		グー	チョキ	パー	いいね!
Alice	グー	--	A	B	B
	チョキ	B	--	A	B
	パー	A	B	--	A
	いいね!	A	A	B	--

どの手を出すか?

グー出すくらいなら、いいね!を出す。



グーはいらない(無駄な手).



<https://ja.wikipedia.org/wiki/いいね!ボタン>

Q.意味のある4手ジャンケン？

無駄な手のない4手ジャンケン

無駄な手のない5手ジャンケン（2チーム）

ディスカッション5分

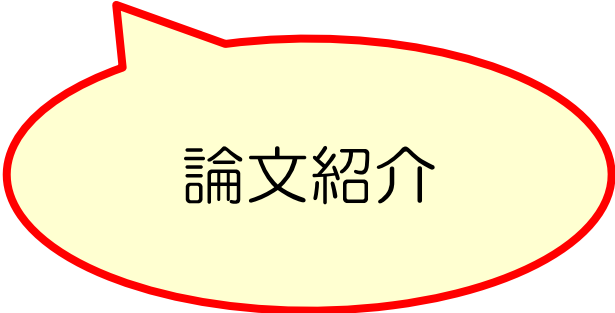
関連する講義

- 線形代数
- (微分積分学)
- 確率統計 (3前)
- 離散数学 (3前)
- ゲーム理論 (4)
 - ✓ 2人ゼロ和ゲーム
- 数理計画法 (3後)
- ...

一般化ジャンケンに対するゲーム理論的解析

小松, 秀平
九州大学経済学部経済工学科

小野, 廣隆
九州大学大学院経済学研究院経済工学部門



論文紹介

本発表の概要

- 小松と小野によれば、相異なる手には引き分けのない偶数手のジャンケンには**ゲーム論的に無駄な手**が必ず存在する。

戦略的に無駄な手

「小松 秀平, 小野 廣隆, **一般化ジャンケンに対するゲーム理論的解釈**, 九州大学学術情報リポジトリ, 2015.」より,
定理9を話者翻案.

□ **n 手ジャンケン**: 利得行列 $A \in \{-1, 0, 1\}^{n \times n}$ s.t. A は**歪対称**.

➤ **明確ジャンケン**: A の非対角が非ゼロ□

➤ **手**: $i \in \{1, \dots, n\}$

$$A^T = -A$$

例: 異なる手のあいこを許すと,
有効な4手ジャンケンが存在する

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bob

		グー	チョキ	パー	いいね!
Alice	グー	--	A	--	B
	チョキ	B	--	A	--
	パー	--	B	--	A
	いいね!	A	--	B	--

戦略的に無駄な手

「小松 秀平, 小野 廣隆, **一般化ジャンケンに対するゲーム理論的解釈**, 九州大学学術情報リポジトリ, 2015.」より,
定理9を話者翻案.

□ **n 手ジャンケン**: 利得行列 $A \in \{-1, 0, 1\}^{n \times n}$ s.t. A は**歪対称**.

➤ **明確ジャンケン**: A の非対角が非ゼロ

➤ **手**: $i \in \{1, \dots, n\}$

$$A^T = -A$$

□ i が (x において) **戦略的に無駄な手**: $x \in \mathcal{N}_A, x_i = 0$.

□ i が **全戦略的に無駄な手**: $\forall x \in \mathcal{N}_A, x_i = 0$.

□ ジャンケン A が **戦略効率的**: 全戦略的に無駄な手が存在しない.

ゲーム理論一般用語

□ 混合戦略 (または単に **戦略**): $x \in \mathbb{R}^n$ s.t. $\|x\|_1 = 1, x \geq 0$

➤ **命題**: 自分 x , 相手 y のとき, 自分の期待利得は $x^T A y$.

□ **Nash均衡**: $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ s.t. $x^{*\top} A y^* = \max_x \min_y x^T A y$

➤ 単に x^* を **Nash均衡戦略** と呼ぶ

➤ $\mathcal{N}_A$: A の Nash均衡戦略全体の集合

➤ **完全混合 Nash戦略**: $x \in \mathcal{N}_A, x > 0$.

戦略的に無駄な手

「小松 秀平, 小野 廣隆, 一般化ジャンケンに対するゲーム理論的解釈, 九州大学学術情報リポジトリ, 2015.」より, 定理9を話者翻案.

□ n 手ジャンケン: 利得行列 $A \in \{-1, 0, 1\}^{n \times n}$ s.t. A は歪対称.

➤ 明確ジャンケン: A の非対角が非ゼロ

➤ 手: $i \in \{1, \dots, n\}$

$$A^T = -A$$

□ i が (x において) 戦略的に無駄な手: $x \in \mathcal{N}_A, x_i = 0$.

□ i が全戦略的に無駄な手: $\forall x \in \mathcal{N}_A, x_i = 0$.

□ ジャンケン A が戦略効率的: 全戦略的に無駄な手が存在しない.

定理1 [小松, 小野 15]

偶数手の明確ジャンケンには全戦略的に無駄な手が存在する.

定理2 [小松, 小野 15]

奇数手の明確ジャンケンが戦略効率的な時,
Nash均衡戦略は一意.

質問time

戦略的に無駄な手

「小松 秀平, 小野 廣隆, **一般化ジャンケンに対するゲーム理論的解釈**, 九州大学学術情報リポジトリ, 2015.」より,
定理9を話者翻案.

定理1 [小松, 小野 15]

偶数手の**明確**ジャンケンには**全戦略的に無駄な手**が存在する.

定理2 [小松, 小野 15]

奇数手の**明確**ジャンケンが戦略効率的な時,
Nash均衡戦略は一意.

証明の背景知識

- 2人ゼロ和ゲームの**Nash均衡戦略**は**線形計画問題**の最適解
- 線形計画の**双対定理**(弱双対の証明)

ジャンケンの混合Nashを求める線形計画法

「小松 秀平, 小野 廣隆, **一般化ジャンケンに対するゲーム理論的解釈**, 九州大学学術情報リポジトリ, 2015.」より,
定理9を話者翻案.

線形計画 P

$$\begin{aligned} \max. \quad & z \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i - z \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Recall

A: 利得行列

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i \text{ wins } j \\ -1 & j \text{ wins } i \\ 0 & i = j \end{cases}$$

線形計画 P (行列形式)

$$\begin{aligned} \max. \quad & z \\ \text{s. t.} \quad & (A^T, -\mathbf{1}) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

2人**ゼロ和**ゲームの性質

戦略的に無駄な手

「小松 秀平, 小野 廣隆, 一般化ジャンケンに対するゲーム理論的解釈, 九州大学学術情報リポジトリ, 2015.」より, 定理9を話者翻案.

定理1 [小松, 小野 15]

偶数手の**明確**ジャンケンには**全**戦略的に無駄な手が存在する.

定理2 [小松, 小野 15]

奇数手の**明確**ジャンケンが戦略効率的な時,
Nash均衡戦略は一意.

補題1.

A に**全略的に無駄な手**が存在**しない** $\Leftrightarrow A$ に**完全Nash均衡**が存在

補題2.

(P)が**正の**最適解 x^* を持つ

$\Leftrightarrow A'x = b$ は解をもつ. また x^* はその解の一つ.

$\Leftrightarrow A$ に**完全Nash均衡**が存在

2人ゼロ和ゲームの混合Nash均衡の凸性

「小松 秀平, 小野 廣隆, 一般化ジャンケンに対するゲーム理論的解釈, 九州大学学術情報リポジトリ, 2015.」より, 定理9を話者翻案.

補題1.

A に全略的に無駄な手が存在しない $\Leftrightarrow A$ に完全Nash均衡が存在

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \exists x \in \mathcal{N}_A, x_i > 0$$

$$\exists x \in \mathcal{N}_A, \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i > 0$$

背景知識

証明

($\Leftarrow$) 自明.

($\Rightarrow$)

- $\mathcal{N}_A$ = 線形計画問題(P)の最適解集合 @2人ゼロ和ゲーム
- (P)の最適解集合(= $\mathcal{N}_A$)は凸: $x \in \mathcal{N}_A, y \in \mathcal{N}_A \Rightarrow \frac{x+y}{2} \in \mathcal{N}_A$

- 手 i に対する前提の解を $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ とする.

➤ つまり, $x_i^{(i)} \in \mathcal{N}_A, x_i^{(i)} > 0$.

- $x^* = \frac{\sum_{i=1}^n x^{(i)}}{n}$ とすると, $x^* \in \mathcal{N}_A, x_i^* > 0$ を満たす.

線形計画問題の
最適解集合の凸性

2人ゼロ和ゲームの混合Nash均衡の凸性

「小松 秀平, 小野 廣隆, 一般化ジャンケンに対するゲーム理論的解釈, 九州大学学術情報リポジトリ, 2015.」より, 定理9を話者翻案.

補題1.

A に全略的に無駄な手が存在しない $\Leftrightarrow A$ に完全Nash均衡が存在

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \exists x \in \mathcal{N} \quad x_i > 0$$

$$\exists x \in \mathcal{N}_A, \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i > 0$$

証明

($\Leftarrow$) 自明.

($\Rightarrow$)

補題1は2人ゼロ和ゲーム一般に成り立つ.

- 手 i に対する前提の解を $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ とする.

➤ つまり, $x_i^{(i)} \in \mathcal{N}_A, x_i^{(i)} > 0$.

- $x^* = \frac{\sum_{i=1}^n x^{(i)}}{n}$ とすると, $x^* \in \mathcal{N}_A, x_i^* > 0$ を満たす.

線形計画問題の
最適解集合の凸性

対称ゲームの性質(多分)

$$A' = \begin{pmatrix} & & -1 \\ & A^\top & \vdots \\ & & -1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ z \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[後で重要]

A' は**歪対称**

➤ つまり $A'^\top = -A'$

補題2.

線形計画問題(P)が**正の最適解** $x^* > 0$ を持つ

$\Leftrightarrow A'x = b$ は解をもつ. また x^* はその解の一つ.

証明

(P') max. $b^\top x$ s.t. $A'x \geq b, x \geq 0$

(D') min. $b^\top y$ s.t. $A'^\top y \leq b, y \geq 0$

x^*, y^* を最適解とする, 強双対より $b^\top x^* = b^\top y^*$.

弱双対定理の証明をなぞると,

$$\begin{aligned} 0 &= b^\top x^* - b^\top y^* \geq (A'^\top y^*)^\top x^* - y^{*\top} b \\ &= y^{*\top} (A'x^*) - y^{*\top} b = y^{*\top} (A'x^* - b) \geq 0 \end{aligned}$$

つまり, $y^{*\top} (A'x^* - b) = 0$. したがって, $y^* > 0$ ならば $A'x^* = b$.

*話者翻案: 本当は要注意
(元論文は注意深く書かれてる.)

相補スラック条件

対称ゲームの性質(多分)

$$A' = \begin{pmatrix} & & -1 \\ & A^\top & \vdots \\ & & -1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ z \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[後で重要]

A' は歪対称

➤ つまり $A'^\top = -A'$

補題2.

線形計画問題(P)が**正の**最適解 $x^* > 0$ を持つ

$\Leftrightarrow A'x = b$ は解をもつ. また x^* はその解の一つ.

証明

(P') max. $b^\top x$ s.t.

(D') min. $b^\top y$

x^*, y^* を

弱双対定

$$0 = b^\top x^* - b^\top y^*$$

$$= y^{*\top} (A'x^*) - y^{*\top} b = y^{*\top} (A'x^* - b) \geq 0$$

つまり, $y^{*\top} (A'x^* - b) = 0$. したがって, $y^* > 0$ ならば $A'x^* = b$.

*託考翻案: 本当は要注意

(よく書かれてる.)

この補題は2人ゼロ和ゲーム
一般では少し注意が必要
(多分Aが正方で有限値ならOK).
対称ゲームなら必ず成り立つ.

補スラック条件

定理1の証明

定理1

偶数手の**明確**ジャンケンには**全**戦略的に無駄な手が存在する。

証明

$$A' = \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & A^\top & & \vdots \\ & & & -1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ z \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[後で重要]
A'は**歪対称**

$$\triangleright A'^\top = -A'$$

□ 補題1,2から, $A'x = b$ が解をもたないことを示せば十分.

- A' は奇×奇行列かつ歪対称 $\Rightarrow A'$ は非正則 ($\text{rank}(A') < n + 1$).
✓ ($\det A' = \det A'^\top = \det(-A')$ より)
- 一方で, A は**歪対称で非対角が非ゼロ**から, $\text{rank}(A) = n$ がいえ.
- したがって, A' と b の定義を考えると, $\text{rank}(A', b) = n + 1$.
- つまり $\text{rank}(A', b) \neq \text{rank}(A') \Rightarrow [A'x = b \text{は解をもたない}]$.

補題 [McCarthy&Benjamin 96]

$m \times m$ 行列 M トーナメントの接続行列(=歪対称, **非対角が非ゼロ**)とすると,

$$\text{rank}(M) = \begin{cases} m & m \text{偶数} \\ m-1 & m \text{奇数} \end{cases}$$

Clifford A. McCarthy and Arthur T. Benjamin, Determinants of the tournaments, Mathematics Magazine, 133—135, 1996.

定理2の証明

定理2

奇数手の**明確**ジャンケンが戦略効率的な時,
Nash均衡戦略は一意.

$$A' = \begin{pmatrix} & A^\top & \begin{matrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{matrix} \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ z \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[後で重要]
 A' は**歪対称**
➤ $A'^\top = -A'$

証明

- A' は**歪対称**で**非対角が非ゼロ**から, $\text{rank}(A') = n + 1$ がいえる.
- したがって, $A'x = b$ は一意の解をもつ.

補題 [McCarthy&Benjamin 96]

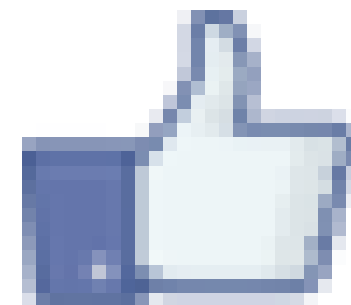
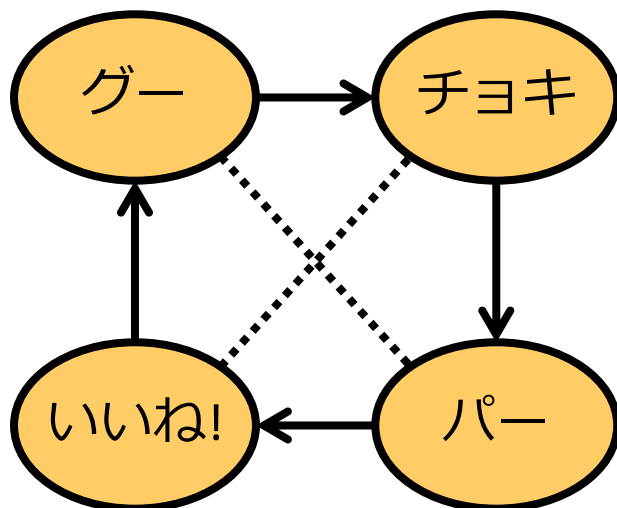
$m \times m$ 行列 M トーナメントの接続行列(=歪対称, **非対角が非ゼロ**)とすると,

$$\text{rank}(M) = \begin{cases} m & m \text{ 偶数} \\ m - 1 & m \text{ 奇数} \end{cases}$$

Clifford A. McCarthy and Arthur T. Benjamin, Determinants of the tournaments, Mathematics Magazine, 133—135, 1996.

異なる手のあいこを許すと、有効な4手ジャンケンが存在する

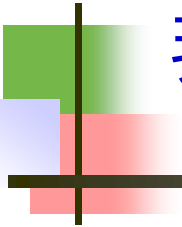
		Bob			
		グー	チョキ	パー	いいね!
Alice	グー	--	A	--	B
	チョキ	B	--	A	--
	パー	--	B	--	A
	いいね!	A	--	B	--



<https://ja.wikipedia.org/wiki/いいね!ボタン>

本発表の概要

- 小松と小野によれば、相異なる手には引き分けのない偶数手のジャンケンには**ゲーム論的に無駄な手**が必ず存在する。
- **ジャンケン**は勝敗が**決定的**に定まるゲームのモデルである。一方、現実世界において、勝敗は往々にして**確率的**である。本研究では勝敗が確率的に定まるゲームの素朴なモデルとして、**非推移的サイコロ**について議論する。
- ある種の公平性の条件をおき、サイコロ構築問題を考える。**最強のサイコロ**が存在するか否かを調べる？



非推移的サイコロのはなし

Efron's dice

$A = (0, 0, 4, 4, 4, 4)$

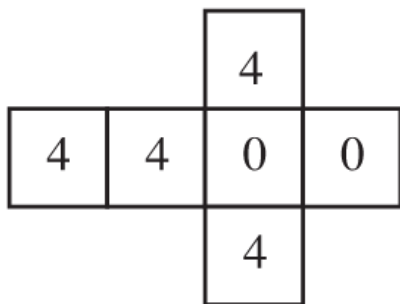
$B = (3, 3, 3, 3, 3, 3)$

$C = (2, 2, 2, 2, 6, 6)$

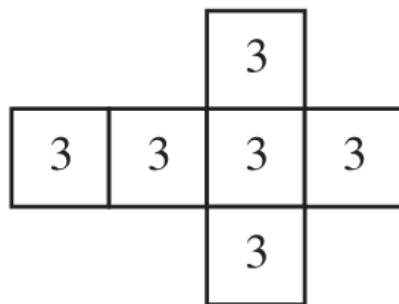
$D = (1, 1, 1, 5, 5, 5)$

die 1

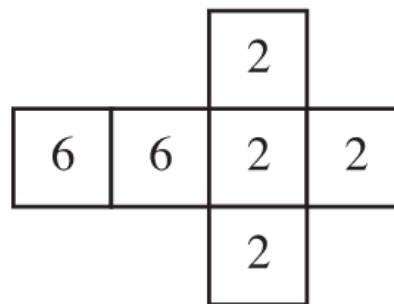
A



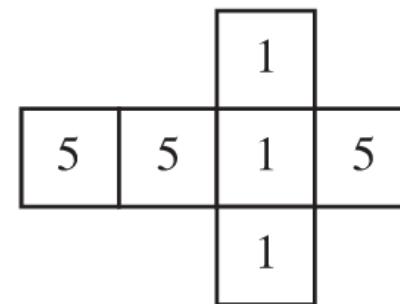
B



C



D



<https://mathworld.wolfram.com/EfronsDice.html>

Efron's dice

A = (0, 0, 4, 4, 4, 4)

B = (3, 3, 3, 3, 3, 3)

C = (2, 2, 2, 2, 6, 6)

D = (1, 1, 1, 5, 5, 5)

A/B	3	3	3	3	3	3
0						
0						
4						
4						
4						
4						

$\Pr[X_A > X_B] = \frac{2}{3}$

B/C	2	2	2	2	6	6
3						
3						
3						
3						
3						
3						

$\Pr[X_B > X_C] = \frac{2}{3}$

C/D	1	1	1	5	5	5
2						
2						
2						
2						
6						
6						

$\Pr[X_C > X_D] = \frac{2}{3}$

D/A	0	0	4	4	4	4
1						
1						
1						
5						
5						
5						

$\Pr[X_D > X_A] = \frac{2}{3}$

Efron's dice

A = (0, 0, 4, 4, 4, 4)

B = (3, 3, 3, 3, 3, 3)

C = (2, 2, 2, 2, 6, 6)

D = (1, 1, 1, 5, 5, 5)

A/B	3	3	3	3	3	3
0						
0						
4						
4						
4						
4						

$$\Pr[X_A > X_B] = \frac{2}{3}$$

B/C	2	2	2	2	6	6
3						
3						
3						
3						
3						
3						

$$\Pr[X_B > X_C] = \frac{2}{3}$$

$$A > B > C > D > A$$

⇒ **非推移的**サイコロ (intransitive dice)

C/D	2	2	2	2	6	6
1						
1						
1						
1						
1						

$$\Pr[X_C > X_D] = \frac{2}{3}$$

D/A	1	1	1	5	5	5
0						
0						
0						
0						
0						

$$\Pr[X_D > X_A] = \frac{2}{3}$$

Efron's dice

A = (0, 0, 4, 4, 4, 4)

B = (3, 3, 3, 3, 3, 3)

C = (2, 2, 2, 2, 6, 6)

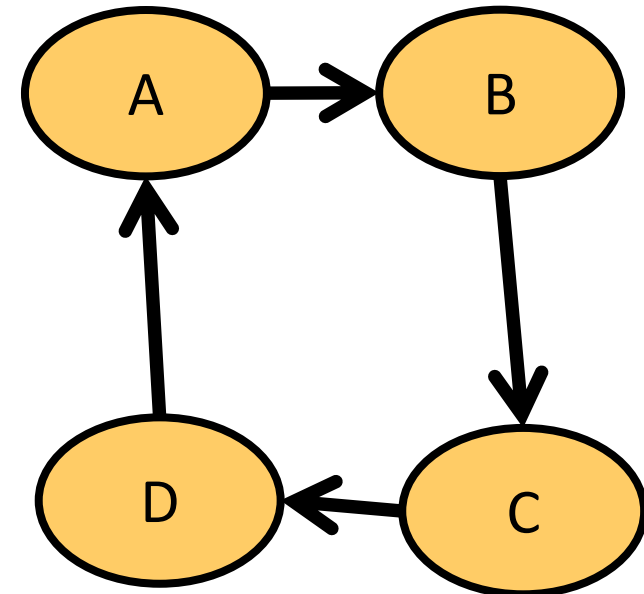
D = (1, 1, 1, 5, 5, 5)

A/C	2	2	2	2	6	6
0						
0						
4						
4						
4						
4						

$\Pr[X_A > X_C] = \frac{4}{9}$

B/D	1	1	1	5	5	5
3						
3						
3						
3						
3						
3						

$\Pr[X_B > X_D] = \frac{1}{2}$



Efron's dice

A = (0, 0, 4, 4, 4, 4)

B = (3, 3, 3, 3, 3, 3)

C = (2, 2, 2, 2, 6, 6)

D = (1, 1, 1, 5, 5, 5)

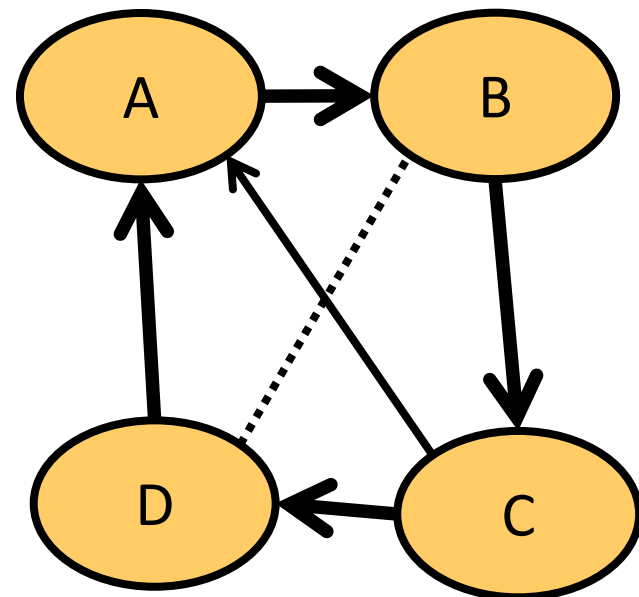
A/C	2	2	2	2	6	6
0						
0						
4						
4						
4						
4						

$\Pr[X_A > X_C] = \frac{4}{9}$

B/D	1	1	1	5	5	5
3						
3						
3						
3						
3						
3						

$\Pr[X_B > X_D] = \frac{1}{2}$

4つとも、戦略的に有効?



Efron's diceのNash均衡戦略

VOL. 74, NO. 3, JUNE 2001

215

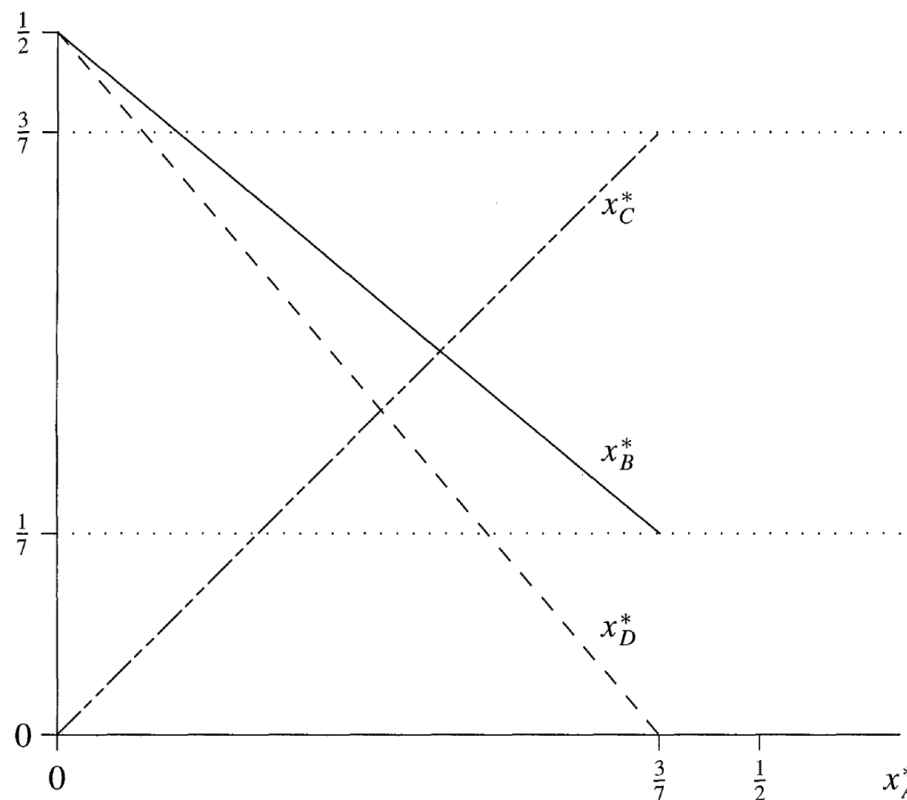


Figure 2 Optimal strategy solutions

C. Rump, Strategies for rolling the Efron dice, Mathematics Magazine, 74 (3): 212 - 216, 2001.

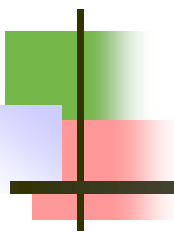
非推移的サイコロのNash均衡

盧尚, 来嶋秀治, 四つ組の非推移的サイコロの混合戦略,
第178回アルゴリズム研究会 (AL177振替), オンライン,
令和2年5月9日.

- ✓ 任意の3個組の非推移的サイコロのNash均衡戦略は？
⇒ 一意に求まる.
- ✓ 任意の4個組の非推移的サイコロは**全戦略的に無駄なサイコロ**を含むか？
⇒ 含む時も, 含まない時もある.

特徴付けが今後の課題.

良い定理は何度でも発見される。
---山下雅史



Irving Kaplanskyの定理 (1945, 1995)

- Irving Kaplansky, A contribution to von Neumann's theory of games, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 46, No. 3 (Jul., 1945), pp. 474-479.
- Irving Kaplansky, A contribution to von Neumann's theory of games. II, Linear Algebra and its Applications, Vol. 226–228 (Sep.-Oct. 1995), pp. 371-373.

I. Kaplansky, A contribution to von Neumann's theory of games, *Annals of Mathematics, Second Series*, Vol. 46, No. 3 (Jul., 1945), pp. 474-479.

$$(0 \quad | \quad G_k)$$

Here $v'(G) = 0$ unless the $v'(G_i)$ have the same sign, in which case

$$\frac{1}{v'(G)} = \frac{1}{v'(G_1)} + \frac{1}{v'(G_2)} + \cdots + \frac{1}{v'(G_k)}.$$

(d) *Symmetric games.* The game G is symmetric if and only if its matrix is skew-symmetric. Of course $v'(G) = 0$, so the only interest lies in locating good strategies. Since the rank of a skew-symmetric matrix is even, we have the curious fact that an n by n symmetric game can be completely mixed only if n is odd.

For $n = 3$, the game

$$\begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

is completely mixed if and only if a, b, c are different from zero and have the same sign. The unique good strategy is then $(a/(a + b + c), b/(a + b + c), c/(a + b + c))$. (This is a sort of generalization of "Stone, Paper and Scissors").⁴

The symmetric game $\| a_{ij} \|$ of order 5 is completely mixed if and only if the five expressions

$$\begin{aligned} & a_{25}a_{34} - a_{35}a_{24} + a_{45}a_{23} \\ & - a_{15}a_{34} + a_{35}a_{14} - a_{45}a_{13} \\ & a_{15}a_{24} - a_{25}a_{14} + a_{45}a_{12} \\ & - a_{15}a_{23} + a_{25}a_{13} - a_{35}a_{12} \\ & a_{14}a_{23} - a_{24}a_{13} + a_{34}a_{12} \end{aligned}$$

have the same sign and the unique good strategy is then proportional to them.

Kaplanskiの定理 (話者翻案)

対称ゲーム:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は歪対称

観察 [Kaplanski 45]

A は $n \times n$ 歪対称行列とする. n が偶数のとき,
対称ゲーム A は完全混合 Nash をもたない.

系 ([Kaplanski 45] + [小松, 小野15; 補題1])

偶数手の**明確**対称ゲームには**全戦略的に無駄な手**が存在する.

定理 [Kaplanski 95 ($n \leq 5$ は 1945 年)]

A は $n \times n$ 歪対称行列とし, n は奇数とする.

A が**完全混合 Nash 均衡戦略**をもつ

$\Leftrightarrow A$ の **i 番目の principle Pfaffian** p_i が $x_i^* := (-1)^{i-1} p_i > 0$ を満たす.

Nash 均衡戦略は一意に定まり, $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$.

i 番目の Principle Pfaffian: A の i 行と i 列を除いた

$(n-1) \times (n-1)$ 行列 A_{ii} の **Pfaffian** (定義割愛)

(歪対称行列 B に対して, $\text{Pf}(B)^2 = \det(B)$ が成り立つ)

Pfaffian

□ 定義: $2n \times 2n$ 歪対称行列 A に対して

$$\text{Pf}(A) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma_{2i-1} \sigma_{2i}}$$

□ Pfaffianの有名な性質に

$$\text{Pf}(A)^2 = \det(A)$$

□ Pfaffianの計算量は $O(n^3)$ cf. [Wimmer 2012]

➤ ガウスの消去法による $\det$ の計算に似た方法

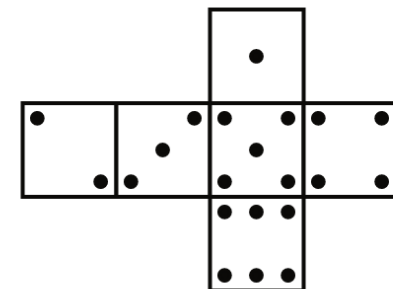
Wimmer, M. (2012). "Efficient numerical computation of the Pfaffian for dense and banded skew-symmetric matrices". ACM Trans. Math. Softw. 38: 30. arXiv:1102.3440. doi:10.1145/2331130.2331138. S2CID 15331538.

標準サイコロは強い

🔍 nontransitive dice Nash

標準サイコロ

<https://mathworld.wolfram.com/Dice.html>



Artem Hulko and Mark Whitmeyer, A game of nontransitive dice, Mathematics Magazine, 92:5,(2019), 368-373.

定理 [Hulko, Whitmeyer 19]

サイコロの各面の目は $\{1, \dots, n\}$ の要素とし, 合計は $\frac{n(n+1)}{2}$ とする. このとき**標準サイコロ** $(1, 2, \dots, n)$ は, どのサイコロにも負けない (勝つ or 引き分け).

➡ サイコロの集合を戦略として, 純粋Nash戦略.

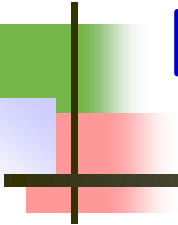
関連研究

- B. De Schuymer, H. De Meyer, B. De Baets, Optimal strategies for equal-sum dice games, Discrete Applied Mathematics, 154: 2565 - 2576, 2006.
- M. Finkelstein, E. O. Thorp, Nontransitive dice with equal means, In Optimal Play: Mathematical Studies of Games and Gambling (S. N. Ethier and W. R. Eadington, eds.), Reno: Institute for the Study of Gambling and Commercial Gaming, 2007.
- Alex Schaefer and Jay Schweig, Balanced nontransitive dice, The College Mathematics Journal , Vol. 48, No. 1 (January 2017), pp. 10-16.
- Simon Joyce, Alex Schaefer, Douglas B. West, Thomas Zaslavsky, Strongly connectable digraphs and non-transitive dice, AKCE Int. J. Graphs Comb. 17:1 (2020), 480-485.

いろいろある (割愛).

本発表の概要

- 小松と小野によれば、相異なる手には引き分けのない偶数手のジャンケンには**ゲーム論的に無駄な手**が必ず存在する。
- **ジャンケン**は勝敗が**決定的**に定まるゲームのモデルである。一方、現実世界において、勝敗は往々にして**確率的**である。本研究では勝敗が確率的に定まるゲームの素朴なモデルとして、**非推移的サイコロ**について議論する。
- ある種の公平性の条件をおき、サイコロ構築問題を考える。**最強のサイコロ**が存在するか否かを調べる？



Is There a Strongest Die in a Set of Dice with the Same Mean Pips?

Shang Lu, *Shuji Kijima

Kyushu Univ.

AAAI 2022

Schaefer and Schweig 17

3個組のサイコロ集合 $\mathcal{D} = \{A, B, C\}$

- $A, B, C \subseteq \{1, \dots, 3m\}$
- $|A| = |B| = |C| = m$: **面数**
- $A \cap B = B \cap C = A \cap C = \emptyset$

例

$m = 6$

$A = \{3, 4, 7, 11, 14, 18\}$

$B = \{2, 6, 9, 10, 13, 17\}$

$C = \{1, 5, 8, 12, 15, 16\}$

[Schaefer and Jay Schweig 17] より

定理 [Schaefer and Schweig 17]

3個組のサイコロ集合 $\mathcal{D} = \{A, B, C\}$ が

$$\Pr[X_A > X_B] = \Pr[X_B > X_C] = \Pr[X_C > X_A]$$

を満たす (“**balanced**”)

$$\Leftrightarrow \text{目の合計が等しい, i.e., } \sum_{a \in A} a = \sum_{b \in B} b = \sum_{c \in C} c = \frac{3(3m+1)}{2}.$$

- Alex Schaefer and Jay Schweig, Balanced nontransitive dice, The College Mathematics Journal, Vol. 48, No. 1 (January 2017), pp. 10-16.

本論文の「 m 面サイコロ集合」

m は**偶数**とする.

技術的理由(?)

n 個の m 面サイコロ集合 $\mathcal{D} = \{A_1, \dots, A_n\}$

- $A_i \subseteq \{1, \dots, k\}$
- $|A_i| = m$: **面数**
- $A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$
- $\sum_{a \in A_i} a = w$

正則分割の例

$m = 6, n = 3$

$A = \{3, 4, 7, 11, 14, 18\}$

$B = \{2, 6, 9, 10, 13, 17\}$

$C = \{1, 5, 8, 12, 15, 16\}$

[Schaefer and Jay Schweig 17] より

□ (k, m, n, w) **サイコロ集合**: 上の条件を満たす $\mathcal{D}$

□ $k = mn$ のとき, **正則分割**と呼ぶ. $w = \frac{1}{n} \frac{mn(mn+1)}{2}$ に定まる.

Q. 最強サイコロは存在するか？

Easy Thm.

定理 [Lu and K 22]

$\mathcal{D}$ は**正則分割**とする. $A, B \in \mathcal{D}$ が $A \succ B$ なら $\exists C \in \mathcal{D}, C \succ A$.

(k, m, n, w) サイコロ集合 $\mathcal{D} = \{A_1, \dots, A_n\}$

- $A_i \subseteq \{1, \dots, k\}$
- $|A_i| = m$: 面数
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$)
- $\sum_{a \in A_i} a = w$

□ $k = mn$ のとき, **正則分割**と呼ぶ.

➤ $w = \frac{n(mn+1)}{2}$ に定まる.

Easy Thm.

定理 [Lu and K 22]

$\mathcal{D}$ は**正則分割**とする. $A, B \in \mathcal{D}$ が $A \succ B$ なら $\exists C \in \mathcal{D}, C \succ A$.

系 [Lu and K 22]

正則分割 $\mathcal{D}$ に**狭義最強サイコロ**は存在しない.

参考: 定理 [Schaefer and Jay Schweig 17]

3個組のサイコロ集合 $\mathcal{D} = \{A, B, C\}$ が

$$\Pr[X_A > X_B] = \Pr[X_B > X_C] = \Pr[X_C > X_A]$$

を満たす(“**balanced**”)

$\Leftrightarrow$ **目の合計が等しい**, i.e., $\sum_{a \in A} a = \sum_{b \in B} b = \sum_{c \in C} c$.

Easy Thm.

定理 [Lu and K 22]

$\mathcal{D}$ は**正則分割**とする. $A, B \in \mathcal{D}$ が $A \succ B$ なら $\exists C \in \mathcal{D}, C \succ A$.

証明準備

$A, B \subseteq \{1, \dots, k\}$ に対して,

$$S(A, B) := |\{(a, b) \in A \times B \mid a > b\}|$$

注意:

$|A| \neq |B|$ でも良い.

例

A, B がサイコロ ($|A| = |B| = m, A \cap B = \emptyset$)

$$\Rightarrow \Pr[X_A > X_B] = \frac{S(A, B)}{m^2}$$

補題

A, B, C がdisjointなら

$$S(A, B) + S(B, C) = S(A \cup B, C)$$

証明

□ まず, 「 $S([mn] \setminus (A \cup B), A) > \frac{(n-2)m^2}{2}$ (1)」を示す.

$$\bullet S([mn] \setminus (A \cup B), A) = S([mn] \setminus A, A) - S(B, A) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \bullet S([mn] \setminus A, A) &= \left| \bigcup_{i=1}^m \{(x, a_i) \mid x > a_i, x \in [mn] \setminus A\} \right| \\ &= \sum_{i=1}^m (mn - a_i - (m - i)) \\ &= m^2 n - \frac{m(mn + 1)}{2} - \frac{m(m - 1)}{2} \\ &= \frac{(n - 2)m^2}{2} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\bullet (2) > \frac{(n-1)m^2}{2} - \frac{m^2}{2} = \frac{(n-2)m^2}{2}. \quad (1) \text{を得る.}$$

□ 背理法の仮定として $C \succ A$ が存在しないとする.

$$\bullet S([mn] \setminus (A \cup B), A) = \sum_{D \in \mathcal{D} \setminus \{A, B\}} S(D, A) \leq (n - 2) \frac{m^2}{2}$$

➤ (1)に矛盾.

最強サイコロ存在の十分条件

命題

$k \geq 2m$ とする.

サイコロが2個存在するには $m + \frac{1}{2} \leq \frac{w}{m} \leq k - m + \frac{1}{2}$.

定理 (wが大きい時)

$k \geq 2m$ とする. $\frac{w}{m} > \frac{k}{2} + \left(\frac{k}{m} - \frac{3}{2}\right)$ のとき,

狭義最強サイコロが存在する.

定理 (wが小さい時)

$k \geq 2.5m$ とする. $\frac{w}{m} \leq m + 2$ のとき,

狭義最強サイコロが存在する.

(k, m, n, w)サイコロ集合 $\mathcal{D} = \{A_1, \dots, A_n\}$

- $A_i \subseteq \{1, \dots, k\}$
- $|A_i| = m$: 面数
- $A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\sum_{a \in A_i} a = w$

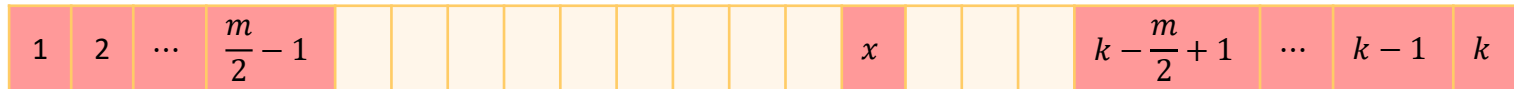
□ $k = mn$ のとき, **正則分割**と呼ぶ.

➤ $w = \frac{n(mn+1)}{2}$ に定まる.

証明の概略

定理 (w が大きい時)

$k \geq 2m$ とする. $\frac{w}{m} > \frac{k}{2} + \left(\frac{k}{m} - \frac{3}{2}\right)$ のとき,
狭義最強サイコロが存在する.



$$\left\{1, 2, \dots, \frac{m}{2}, x, k - \frac{m}{2} + 1, \dots, k\right\}$$

証明の概略

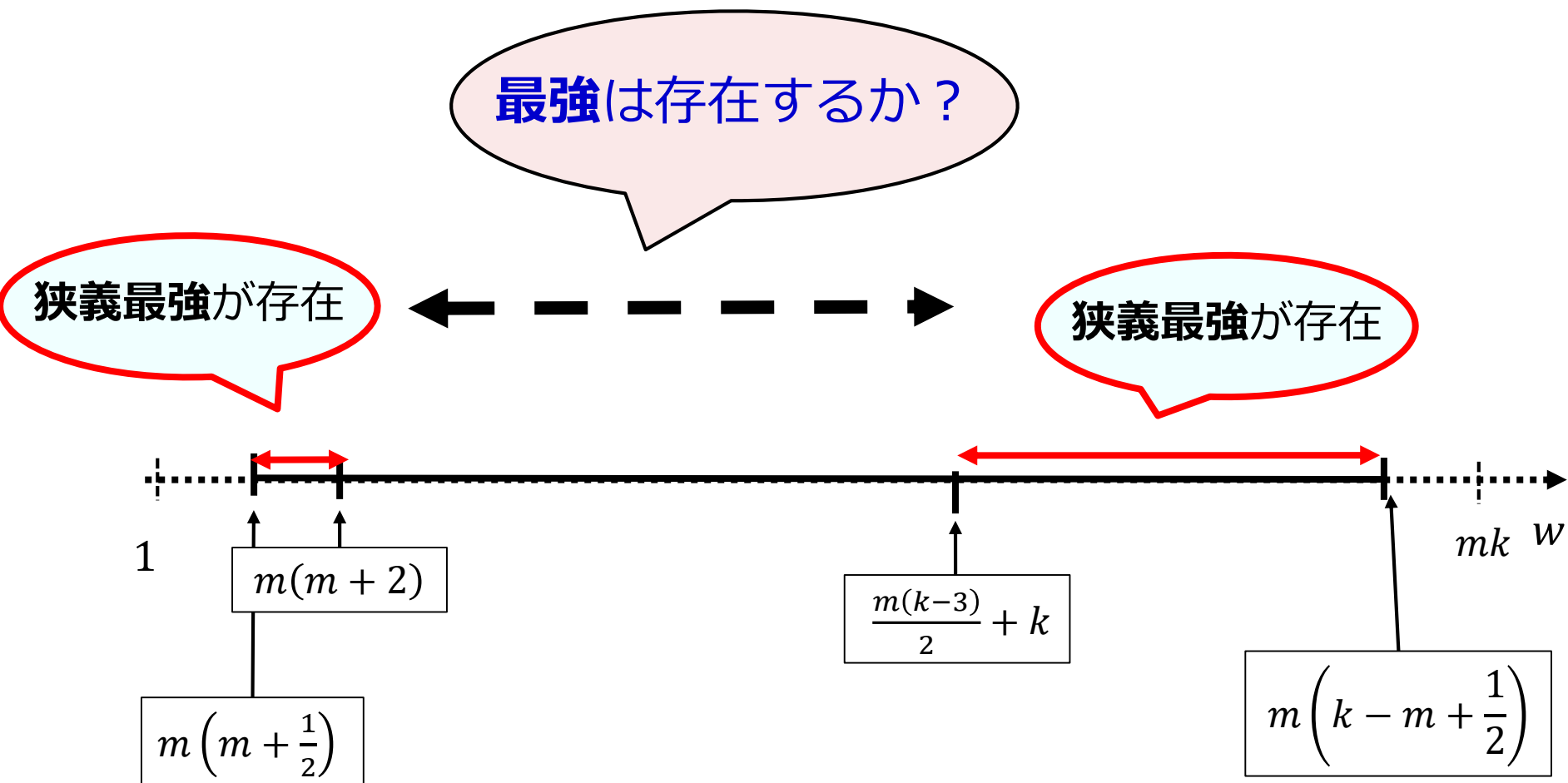
定理 (w が小さい時)

$k \geq 2.5m$ とする. $\frac{w}{m} \leq m + 2$ のとき,
狭義最強サイコロが存在する.

1				$\frac{m}{2} + 1$		...		$\frac{m}{2} + m - 1$			x							k
---	--	--	--	-------------------	--	-----	--	-----------------------	--	--	-----	--	--	--	--	--	--	-----

$$\left\{ \frac{m}{2} + 1, \dots, \frac{3m}{2} + 1, x \right\}$$

定理のまとめ



未解決の範囲について

(特定の k, m について,)**全探索**することにしました。
その前に。

最強性判定問題

Given: サイコロ A , 目の最大値 k .

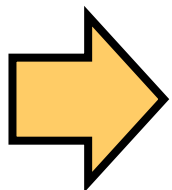
Question: A に勝つサイコロ $B \in \{1, \dots, k\} \setminus A$ は存在するか？

例題

$A = \{5, 6, 7, 12, 14, 18\} \subset \{1, \dots, 20\}$
は最強か？ ($W(A) = 62$)

定理

動的計画法で解ける. $O(kmw)$ 時間.



いろいろ拡張できる.

E.g., A, B ($A > B$)が与えられたとき, $\exists C, B > C > A$?

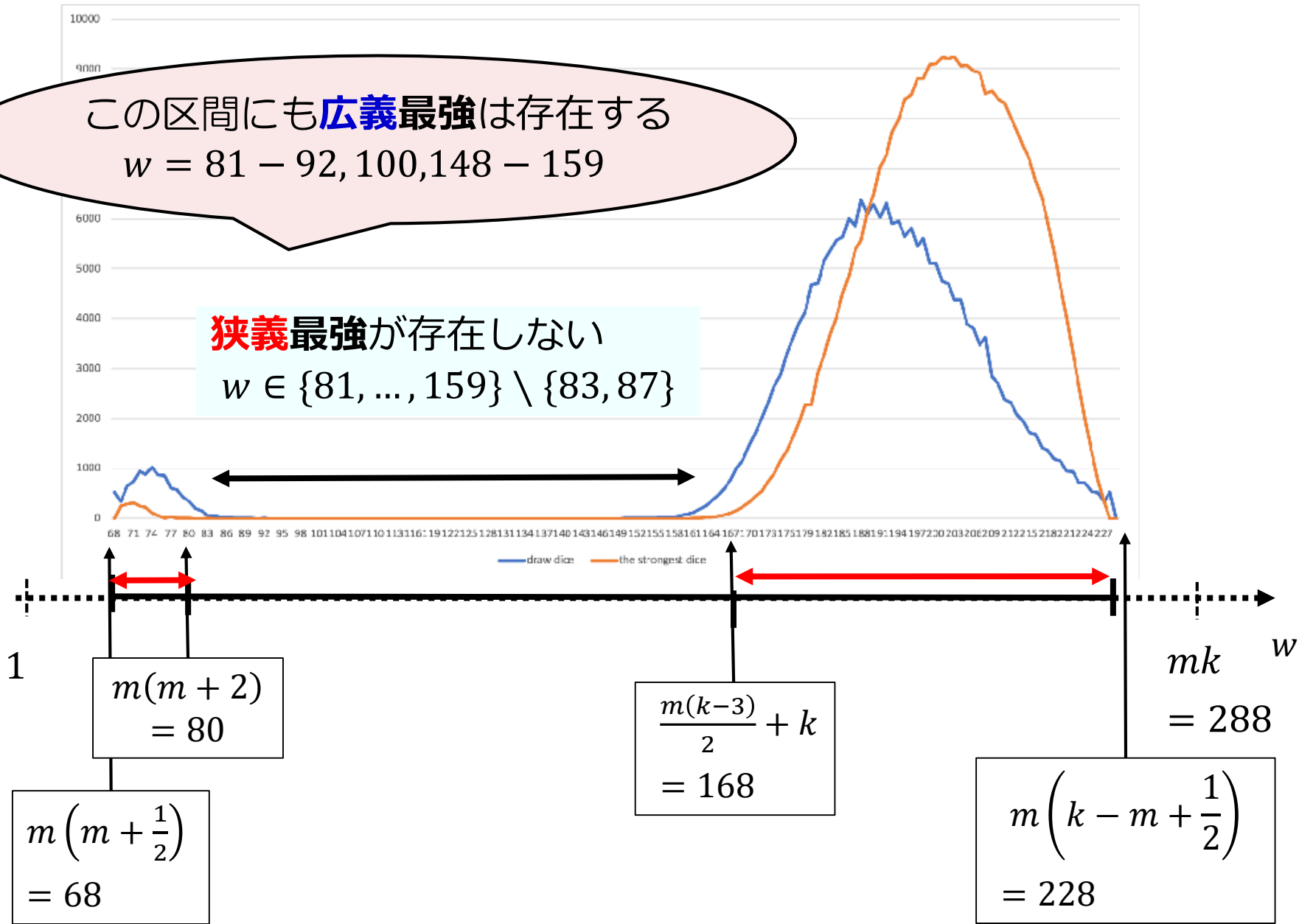
全探索しました: $m = 8, k = 36$

この区間にも**広義最強**は存在する

$$w = 81 - 92, 100, 148 - 159$$

狭義最強が存在しない

$$w \in \{81, \dots, 159\} \setminus \{83, 87\}$$



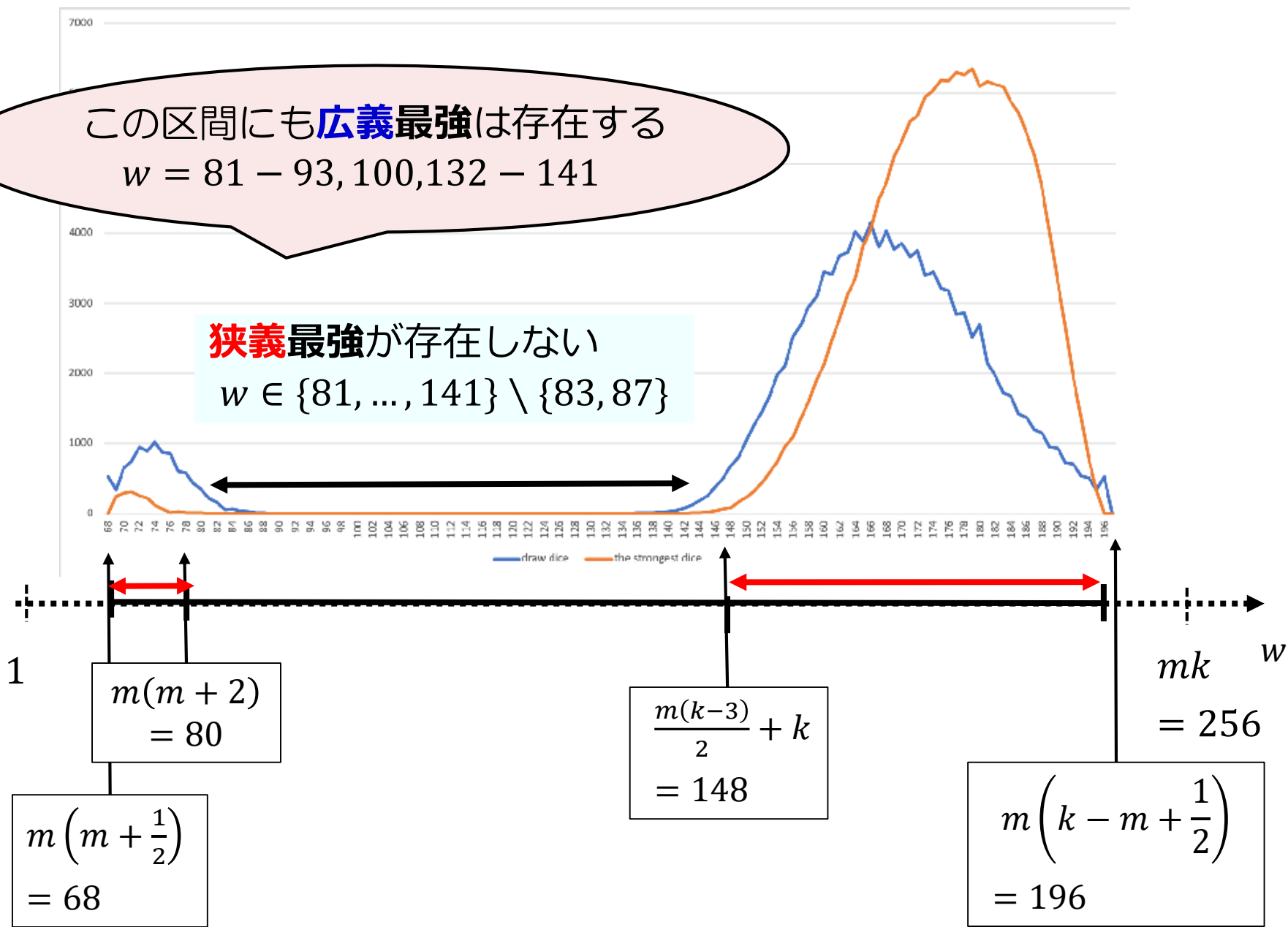
全探索しました: $m = 8, k = 32$

この区間にも**広義最強**は存在する

$w = 81 - 93, 100, 132 - 141$

狭義最強が存在しない

$w \in \{81, \dots, 141\} \setminus \{83, 87\}$





まとめ

Take home message

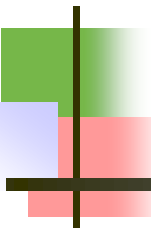
- **良い定理は何度でも発見される。**
 - 同じ結果を見つけても、あまりがっかりしない。
- **たかがトップカンファレンス/ジャーナル、
されどトップカンファレンス/ジャーナル。**
 - 自信をもって、自分の研究を進めましょう。
 - 良いところを目指しましょう。
 - 通すための努力。(「良いものは売れる」わけではない。)
 - 落ちてもあまりがっかりしないメンタル。

本発表の概要

- 小松と小野によれば、相異なる手には引き分けのない偶数手のジャンケンには**ゲーム論的に無駄な手**が必ず存在する。
- ジャンケンは勝敗が**決定的**に定まるゲームのモデルである。一方、現実世界において、勝敗は往々にして**確率的**である。本研究では勝敗が確率的に定まるゲームの素朴なモデルとして、**非推移的サイコロ**について議論する。
- ある種の公平性の条件をおき、サイコロ構築問題を考える。**最強のサイコロ**が存在するか否かを調べる？

次回作に乞うご期待！

おわり。



おわり

2人ゼロ和ゲーム(1/3)

ゲーム $G = (P, \mathcal{S}, a)$

P : **プレイヤー**の集合

$\mathcal{S} = \{S_p | p \in P\}$: 各プレイヤーの**戦略集合族**

$a: P \times \prod_p S_p \rightarrow \mathbb{R}$: 各プレイヤーの戦略に対する**利得**

- プレイヤーが2人($|P| = 2$)の時, **2人ゲーム**という.
 - ここでは, 2人のプレイヤーをAliceとBobと呼ぶ.
- Aliceの戦略集合を S_A , Bobの戦略集合を S_B とする($\mathcal{S} = \{S_A, S_B\}$).
 - 以下, 有限戦略集合 $S_A = \{1, \dots, m\}$, $S_B = \{1, \dots, n\}$ を考える.
- Aliceが戦略 $i \in \{1, \dots, m\}$ をとり, Bobが戦略 $j \in \{1, \dots, n\}$ を取った時の**Aliceの利得**を a_{ij} とする. $A = (a_{ij})$ を**Aliceの利得行列**という.
- Bobの利得 = -Aliceの利得となるとき, **ゼロ和ゲーム**という.
 - ゼロ和ゲームの**Bobの利得行列**は $-A$ である.
 - 便宜のため, 「Aliceの利得」のことを「Bobの損失」ともいう.

2人ゼロ和ゲーム(2/3) 混合戦略と期待利得

$A = (a_{ij})$: 利得行列

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i \text{ wins } j \\ -1 & j \text{ wins } i \\ 0 & i = j \end{cases}$$

Aliceの混合戦略 $x = (x_1, \dots, x_m)^\top$: $x_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$)かつ $\sum_{i=1}^m x_i = 1$ を満たす.

Bobの混合戦略 $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$: $y_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$)かつ $\sum_{i=1}^n y_i = 1$ を満たす.

命題

Aliceの混合戦略が x , Bobの混合戦略が y のとき,
Aliceの**期待利得**は $x^\top A y$.

証明

$$\begin{aligned} \sum_{ij} a_{ij} \Pr_{x,y}[A \text{ plays } i, B \text{ plays } j] &= \sum_{ij} a_{ij} \Pr_x[A \text{ plays } i] \Pr_y[B \text{ plays } j] \\ &= \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j = x^\top M y \end{aligned}$$

2人ゼロ和ゲーム(3/3): Nash均衡

定義: 最適反応戦略 (best response)

$\beta(x) = \min_y x^\top A y$: Aliceの戦略 x に対して, Bobは損失最小戦略

$\alpha(y) = \max_x x^\top A y$: Bobの戦略 y に対して, Aliceは利得最大戦略

定義: 混合Nash均衡 (mixed Nash equilibrium)

x, y が**混合Nash戦略**とは, 互いに最適反応戦略であること.
すなわち,

$$\beta(x) = x^\top A y = \alpha(y)$$

定理(minimax)

任意の二人ゼロ和ゲームについて, $\max_x \min_y x^\top A y = \min_y \max_x x^\top A y$.

補題 (Cf. [Matousek & Gartner, Understanding and Using LP])

任意の二人ゼロ和ゲームについて,

混合Nash均衡は**線形計画法**で効率的に求まる.