

# 完璧にサンプリングしよう!!

## - 2元分割表のランダムサンプリング法 -

来嶋 秀治, 松井 知己

### 問題設定

#### 2元分割表

- 各セルには非負整数が入る
- (与えられた) 周辺和を満たす

					12	
					18	
5	4	3	7	5	6	30

#### 問題

入力: 周辺和

出力: 分割表の**一様ランダム**生成

#### 参考

与えられた周辺和を満たす  
2行分割表の個数の計算  
⇒ #P完全 (NP困難)

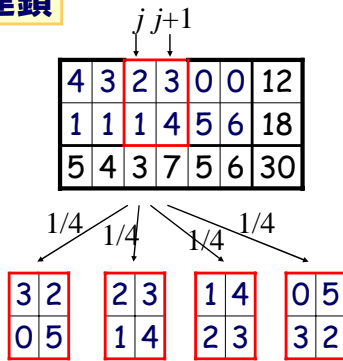
### マルコフ連鎖を用いたサンプリング法

### 提案するマルコフ連鎖

- $j$  列目 (と  $j+1$  列目) を確率  $1/(n-1)$  で選ぶ。
- $j$  列目と  $j+1$  列目に関して推移可能な状態に等確率で推移する。

2	3	5
1	4	5
3	7	10

$+k$	$-k$
$-k$	$+k$



#### 定理

定常分布(=極限分布)は一様分布

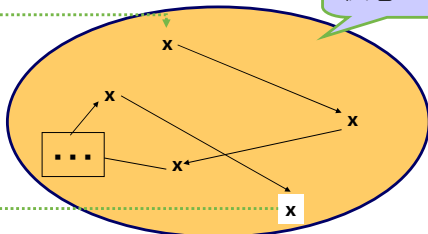
### マルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC法)

任意の初期状態

状態空間

推移を繰り返す

状態を出力



出力は (漸近的に) 定常分布

### 「何回推移させれば十分か？」

#### 近似サンプリング法

分布の "誤差" を算定

✓ 収束スピードの算定

• mixing time

定常分布に**厳密**に従う

#### 完璧サンプリング法

✓ マルコフ連鎖の推移シミュレーション法を工夫

• Coupling from the past アルゴリズム

### 過去からのカップリング

[Propp & Wilson 1996]

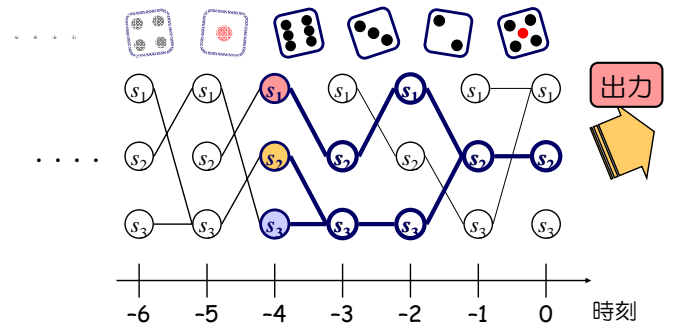
⇨ 仮想的に無限の過去から推移を続けるマルコフ連鎖を考える。

➤ 現在 (時刻 0) の状態は定常分布に**厳密**に従う。

⇨ 現在 (時刻 0) の状態は何か？

➤ 最近の乱数列から推定する。

➤ 現在の状態を一意に特定する**証拠**を見つける。



coalescenceの効率的な確認が必要

### 2行分割表の完璧サンプリング法

#### 定理

提案したマルコフ連鎖は単調

#### マルコフ連鎖の単調性

- 半順序の導入
- 最大限/最小元
- 任意の推移が半順序関係を保存

coalescenceを効率的に確認

5	4	3	0	0	12	
0	0	0	7	5	6	18
5	4	3	7	5	6	30

$X_U$ : 最大元

0	0	0	1	5	6	12
5	4	3	6	0	0	18
5	4	3	7	5	6	30

$X_L$ : 最小元

#### 2元分割表の半順序

累積和ベクトル

$$f_X(i) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & (i=0) \\ \sum_{j=1}^i X_{1j} & (i \in \{1, \dots, n\}) \end{cases}$$

半順序

$$X \geq Y \stackrel{\text{def}}{=} f_X \geq f_Y \quad (\forall i \in \{0, 1, \dots, n\})$$

例

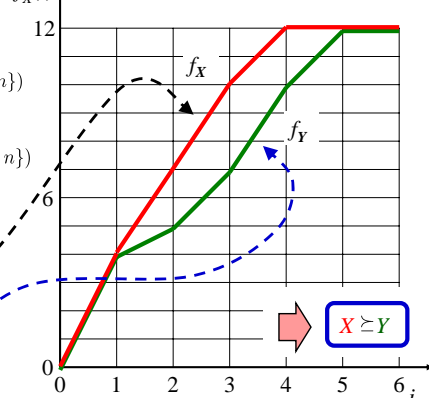
$X$

4	3	3	2	0	0	12
1	1	0	5	5	6	18
5	4	3	7	5	6	30

$Y$

4	1	2	3	2	0	12
1	3	1	4	3	6	18
5	4	3	7	5	6	30

累積和ベクトルの区線形関数



単調CFTPに基づく完璧サンプリング法を実現

[Kijima & Matsui 2006]