May 23, 2025

15. 増えるクーポン収集

来嶋 秀治

滋賀大学 データサイエンス学部

ランダムウォークの指標

- **Hitting time**（確率変数，しばしば期待値を指す）

  $T = \min\{t \mid X_0 = v, X_t = u\}$ 　vから出発してuに至るまでの時間

  $\tau_{\text{hit}} = \mathrm{E}[T]$

  - Return time: $T = \min\{t > 0 \mid X_0 = v, X_t = v\}$
  - Commute time: $T = \min\{t \mid X_0 = u, X_t = u, \exists s < t, X_s = u\}$

- **Cover time**（確率変数，しばしば期待値を指す）

  $T = \min\{t \mid \{v \mid X_s = v\ 0 \leq s \leq t\} = V\}$

  $\tau_{\text{cov}} = \mathrm{E}[T]$ 　vから出発して全頂点を訪問する時間

- **Mixing time**（Pに対する定数）

  $\tau(\epsilon) = \min\{t \mid \forall t' \geq t, \forall v, d_{\text{TV}}(P_v^t, \pi) \leq \epsilon\}$ 　定常分布に収束する時間

  - Coupling time: $T = \min\{t \mid X_t = Y_t, X_0 \neq Y_0\}$
  - Blanket time: $T(\delta) = \min\{t \mid \forall v, N_v(t) > \delta \pi_v t\}$

動的ネットワーク上のアルゴリズム解析

起点: **「現実のネットワークは刻々と変化する」**

- ネットワーク工学で特に注目
  - [Kuhn & Oshman SIGACT News 2011]
  - [Augustine et al. SIGACT News 2016]
  - [Michail & Spirakis CACM 2018]

動的ネットワーク上のアルゴリズム解析

起点: **「現実のネットワークは刻々と変化する」**

- ネットワーク工学で特に注目
  - [Kuhn & Oshman SIGACT News 2011]
  - [Augustine et al. SIGACT News 2016]
  - [Michail & Spirakis CACM 2018]

「しかし、理論的なことはほとんどわかっていない。」

動的ネットワーク上のアルゴリズム解析

起点: **「現実のネットワークは刻々と変化する」**

- ネットワーク工学で特に注目
  - [Kuhn & Oshman SIGACT News 2011]
  - [Augustine et al. SIGACT News 2016]
  - [Michail & Spirakis CACM 2018]

「しかし、理論的なことはほとんどわかっていない。」

- 海外の大型プロジェクト
  - “NETWORKS” (蘭 2014-2023)
  - “DYNAMIC MARCH” (ERC Starting Grant 2016-2021)

動的ネットワーク上のアルゴリズム解析

起点: **「現実のネットワークは刻々と変化する」**

- ネットワーク工学で特に注目
  - [Kuhn & Oshman SIGACT News 2011]
  - [Augustine et al. SIGACT News 2016]
  - [Michail & Spirakis CACM 2018]

「しかし、理論的なことはほとんどわかっていない。」

- 海外の大型プロジェクト
  - “NETWORKS” (蘭 2014-2023)
  - “DYNAMIC MARCH” (ERC Starting Grant 2016-2021)

⇨ 今日は動的グラフ上のRWの話を中心に

クーポン収集

クーポン収集

- ビックリマンシール
- プロ野球チップス
- ガチャ

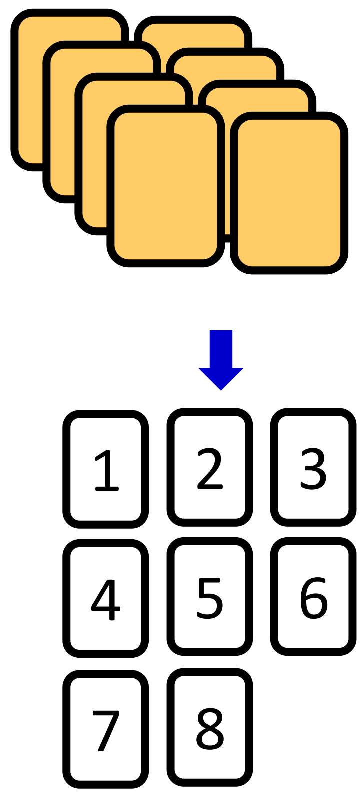
- P●KEM●Nカード100種類．コンプまでに何枚引けば良い？

クーポン収集

- ビックリマンシール
- プロ野球チップス
- ガチャ

- P●KEM●Nカード100種類．コンプまでに何枚引けば良い？

- n種類のカードが裏返しにおいてある．1枚選んでめくり，種類を確認したら元に戻して，よく混ぜる．全ての種類を確認するまでに何回めくればよいか？

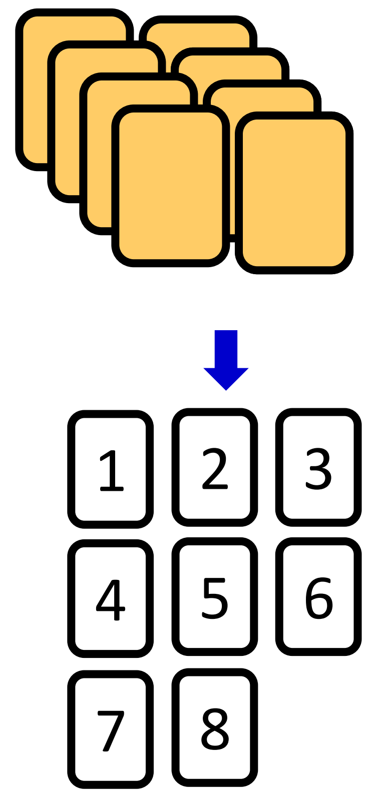


クーポン収集

- ビックリマンシール
- プロ野球チップス
- ガチャ

- P●KEM●Nカード100種類．コンプまでに何枚引けば良い？

- n種類のカードが裏返しにおいてある．1枚選んでめくり，種類を確認したら元に戻して，よく混ぜる．全ての種類を確認するまでに何回めくればよいか？



- 年賀状のお年玉くじ下2桁．00から99まで そろえるには年賀状を何枚もらえばよいか？

- 一万円札を千円札10枚に両替する．千円札の 記番号下2桁を00から99までそろえるには，いくら両替すればよいか？

クーポン収集

- ✓ $X_i \in \{1, \dots, n\}$ $(i = 1,2, \dots)$は独立とし，$\Pr[X_i = k] = \frac{1}{n}(k = 1, \dots, n)$.
- ✓ $T = \min\{t | \{X_1, \dots, X_t\} = \{1, \dots, n\}\}$をコンプ回数(completion time)と呼ぶ.

クーポン収集

- ✓ $X_i \in \{1, \dots, n\}$ $(i = 1,2, \dots)$は独立とし，$\Pr[X_i = k] = \frac{1}{n}$ $(k = 1, \dots, n)$.
- ✓ $T = \min\{t | \{X_1, \dots, X_t\} = \{1, \dots, n\}\}$をコンプ回数(completion time)と呼ぶ.

Q. $\mathrm{E}[T]$を求めよ.

クーポン収集

- ✓ $X_i \in \{1, \ldots, n\}$ $(i = 1,2, \ldots)$は独立とし，$\Pr[X_i = k] = \frac{1}{n}$ $(k = 1, \ldots, n)$.
- ✓ $T = \min\{t | \{X_1, \ldots, X_t\} = \{1, \ldots, n\}\}$をコンプ回数(completion time)と呼ぶ.

Q. $\mathrm{E}[T]$を求めよ.

$T_k \coloneqq \min\{t \mid |\{X_1, \ldots, X_t\}| = k\}$:$k$種コンプ回数

$S_k \coloneqq T_k - T_{k-1}$:$k-1$種コンプしてから新種が出るまでの回数

Claim. $\mathrm{E}[S_k] = \frac{n}{n-k+1}$.

- ✓ $k-1$種コンプした状態で，新種の出る確率 $p_k = \frac{n-(k-1)}{n}$.
- ✓ 従って$\mathrm{E}[S_k] = \frac{1}{p_k} = \frac{n}{n-k+1}$ (幾何分布の期待値).

$T = T_n = \sum_{k=1}^{n} S_k$に注意して，

$$\mathrm{E}[T] = \mathrm{E}[T_n] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}[S_k] = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1} = n \sum_{k'=1}^{n} \frac{1}{k'} \simeq n(\ln n + 0.577)$$

$\simeq 519$ ($n = 100$の時)

クーポン収集

- ✓ $X_i \in \{1, \dots, n\}$ $(i = 1,2, \dots)$は独立とし，$\Pr[X_i = k] = \frac{1}{n}$ $(k = 1, \dots, n)$.
- ✓ $T = \min\{t | \{X_1, \dots, X_t\} = \{1, \dots, n\}\}$をコンプ回数(completion time)と呼ぶ.

Q. $\mathrm{E}[T]$を求めよ.

Q. $\Pr[T \geq 2n \ln n]$はどれくらいか？

クーポン収集

- ✓ $X_i \in \{1, \dots, n\}$ $(i = 1,2, \dots)$は独立とし，$\Pr[X_i = k] = \frac{1}{n}(k = 1, \dots, n)$.
- ✓ $T = \min\{t | \{X_1, \dots, X_t\} = \{1, \dots, n\}\}$をコンプ回数(completion time)と呼ぶ.

Q. $\mathrm{E}[T]$を求めよ.

Q. $\Pr[T \geq 2n \ln n]$はどれくらいか？

Chevyshevの不等式を使うと

$$\Pr\big[X \geq 2\mathrm{E}[X]\big] \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{\mathrm{E}[X]^2} \leq \frac{\frac{n^2\pi^2}{6}}{(n \ln n)^2} = \frac{\pi^2}{6(\ln n)^2}$$

≃0.078 ($n = 100$の時)

増えるクーポン収集

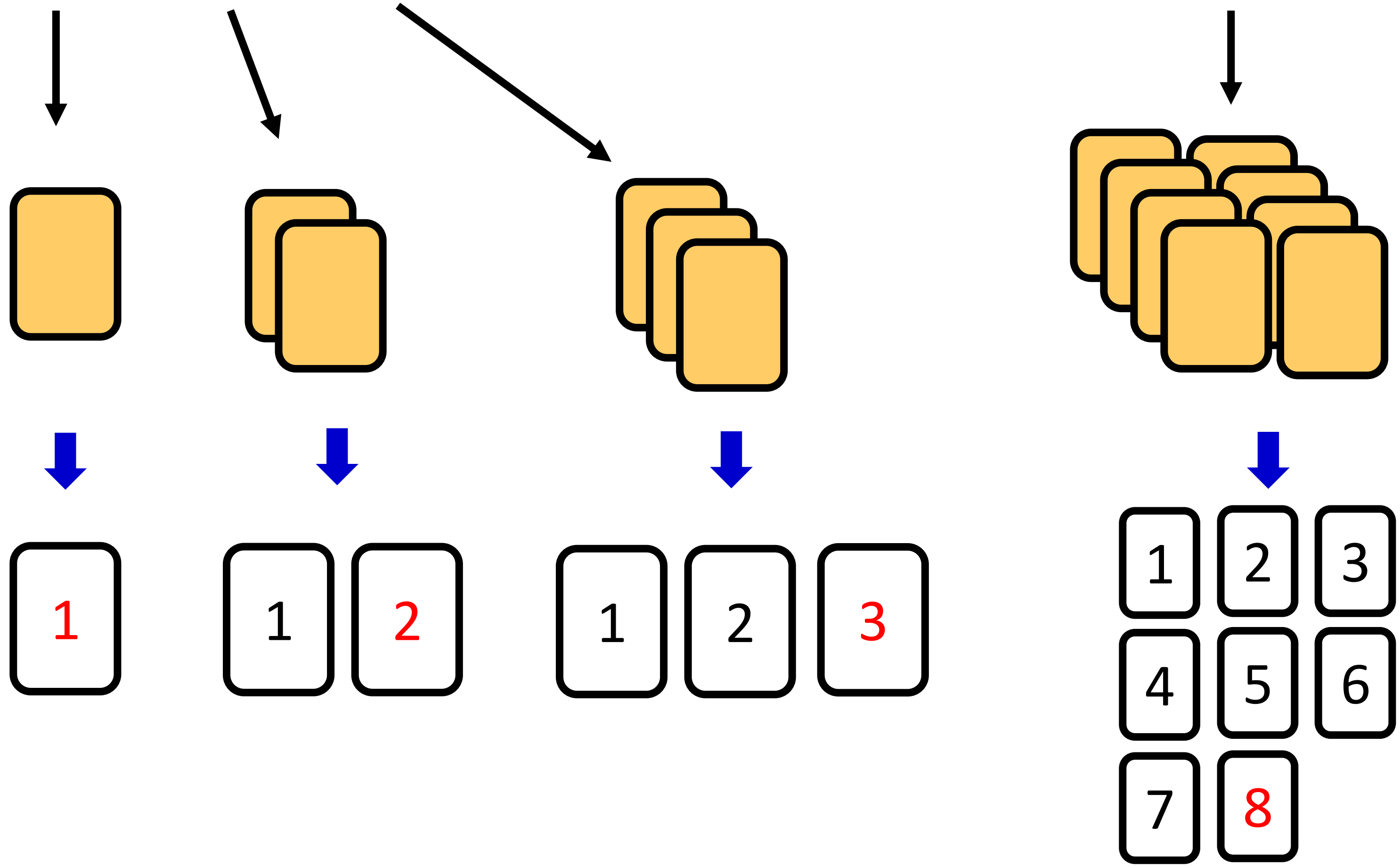
増えるクーポン収集

毎日1回ガチャを引く.

- 毎日1種ずつ増えるとき，コンプ回数は？

増えるクーポン収集

Day (i)	1日目	2日目	3日目	4日目	5日目	6日目	7日目	8日目	9日目
種類	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Pr[X_i = k]$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$



増えるクーポン収集

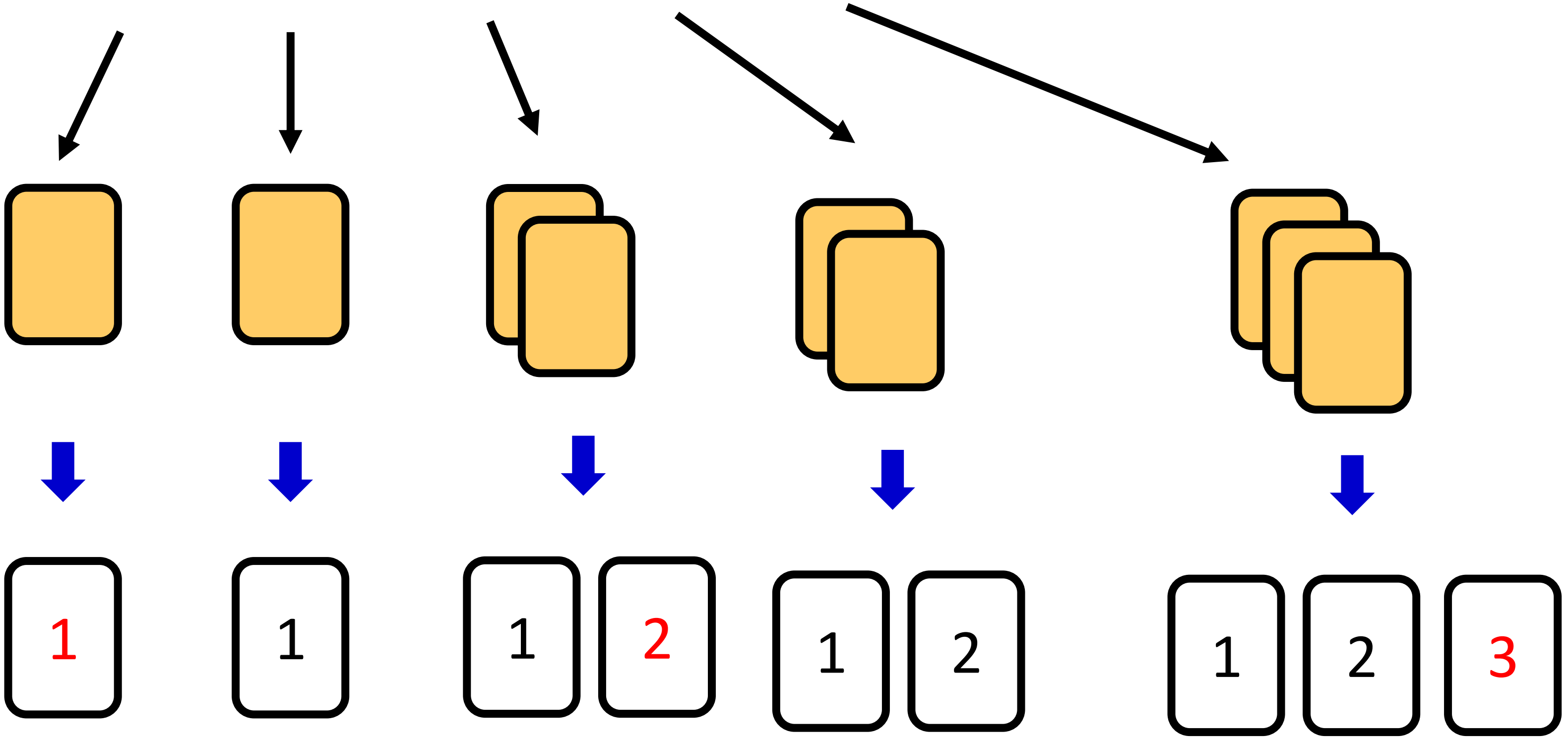
毎日1回ガチャを引く．

- 毎日1種ずつ増えるとき，コンプ回数は？
  - コンプ不可能

- 2日に1回新種リリースされたら，コンプ回数は？

増えるクーポン収集

Day	1日目	2日目	3日目	4日目	5日目	6日目	7日目	8日目	9日目
種類	1	1	2	2	3	3	4	4	5
$\Pr[X_i = k]$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$



増えるクーポン収集

毎日1回ガチャを引く.

- 毎日1種ずつ増えるとき，コンプ回数は？
  - コンプ不可能

- 2日に1回新種リリースされたら，コンプ回数は？
  - コンプ不可能

- 10日に1回リリースされたら？
  - コンプ不可能(種類数1000の時を考えてみよ)

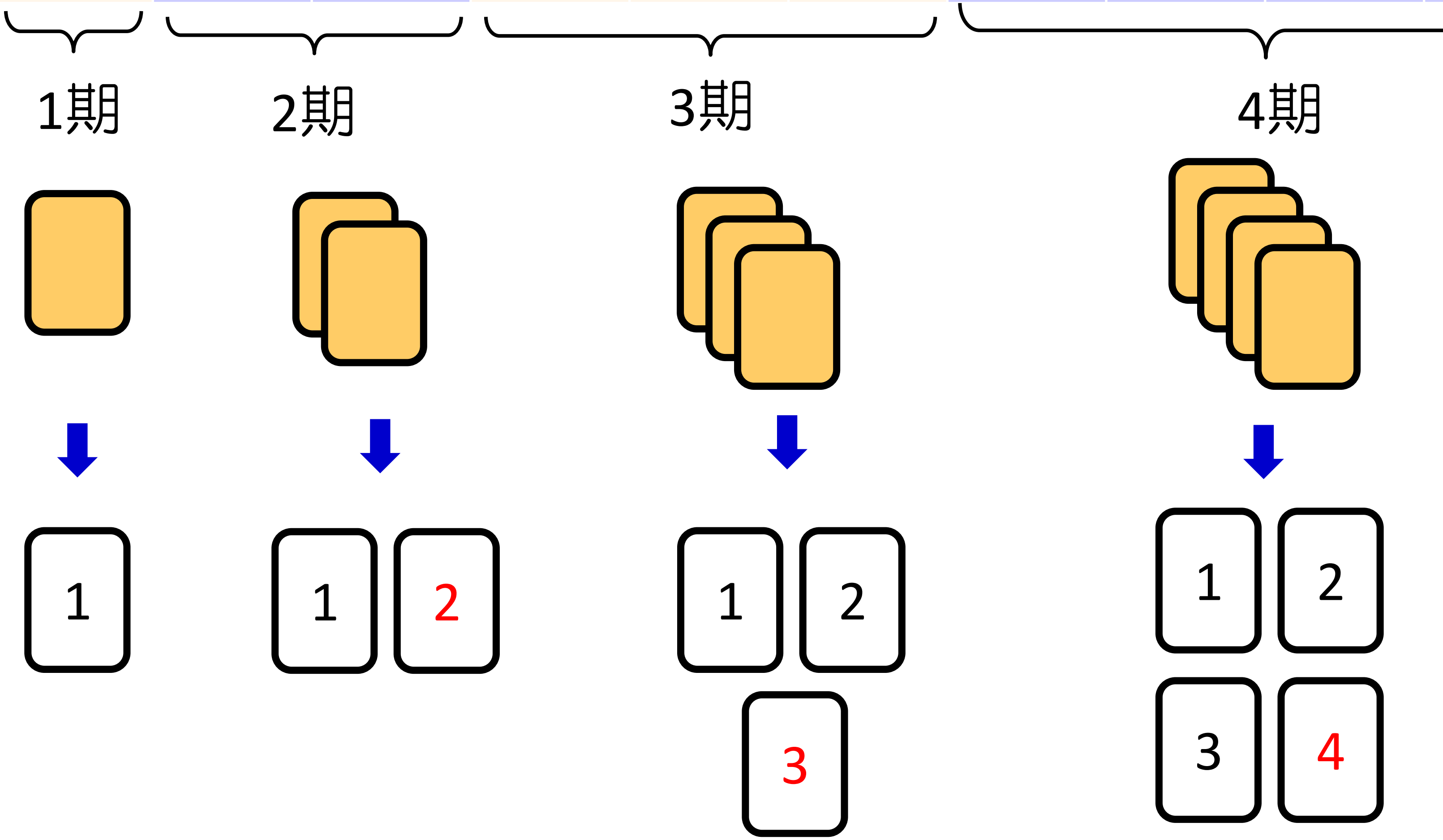
ゆっくりと増えるクーポン収集

毎日1回ガチャを引く.

- n種類目がリリースされてn日後に新種がリリース.
  - Q. コンプ回数は？

ゆっくりと増えるクーポン収集

Day	1日目	2日目	3日目	4日目	5日目	6日目	7日目	8日目	9日目
種類	1	2	2	3	3	3	4	4	4
$\Pr[X_i = k]$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$



ゆっくりと増えるクーポン収集

毎日1回ガチャを引く.

- n種類目がリリースされてn日後に新種がリリース.
  - Q. コンプ回数は？
    - ✓ A. コンプ不可能(新種は出続けるから)

- **Q. n期末にはどのくらいコンプされる？**
  1. $o(n)$
  2. cn
  3. $n - c\sqrt{n}$
  4. $n - c\log n$
  5. $n - c$

cは適当な定数

ゆっくりと増えるクーポン収集

毎日1回ガチャを引く.

- n種類目がリリースされてn日後に新種がリリース.
  - Q. コンプ回数は？
    - A. コンプ不可能(新種は出続けるから)

- **Q. n期末にはどのくらいコンプされる？**

1. $\mathrm{o}(n)$
2. cn
3. $n - c\sqrt{n}$
4. $n - c \log n$
5. **$n - c$ (正解)**

cは適当な定数

ゆっくりと増えるクーポン収集

毎日1回ガチャを引く(一様ランダム)

$\mathfrak{d}(n)$: n期の日数

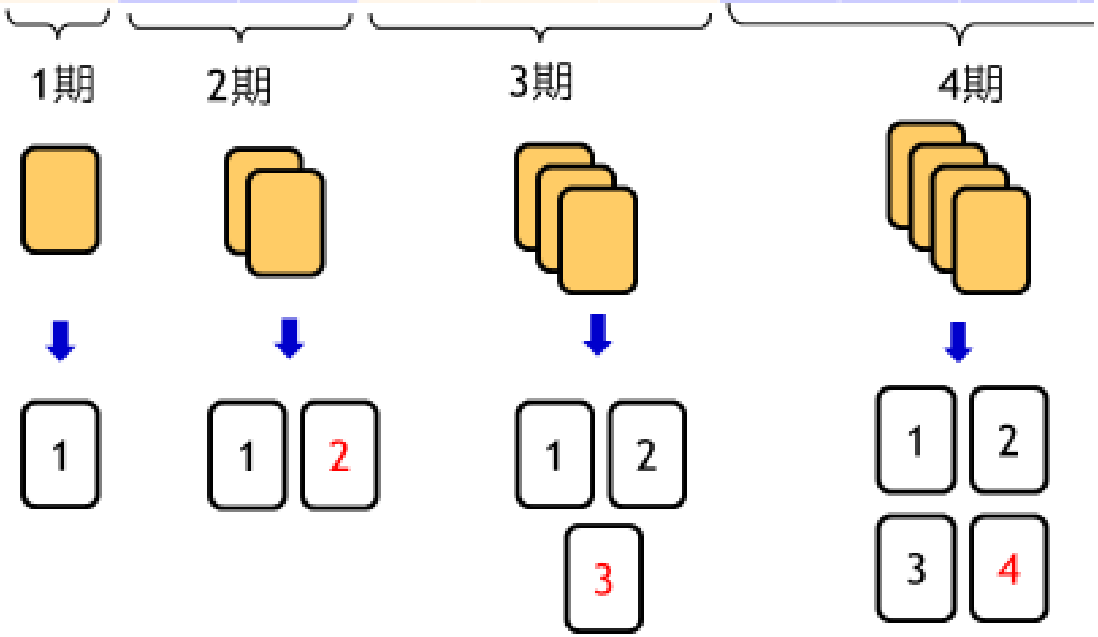
U_n: n期末の未収集アイテムの種類数

命題

$\mathfrak{d}(n) = n$のとき，$\mathrm{E}[U_n] < 1$.

ゆっくりと増えるクーポン収集

Day	1日目	2日目	3日目	4日目	5日目	6日目	7日目	8日目	9日目
種類	1	2	2	3	3	3	4	4	4
$\Pr[X_i = k]$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$



ゆっくりと増えるクーポン収集

毎日1回ガチャを引く(一様ランダム)

$\mathfrak{d}(n)$: n期の日数

U_n: n期末の未収集アイテムの種類数

命題

$\mathfrak{d}(n) = n$のとき，$\mathrm{E}[U_n] < 1.$

証明

- ✓ $\mathcal{E}_{i,n} := \begin{cases} 1 & (n\text{期末にアイテム}\ i\ \text{が未収集}) \\ 0 & (n\text{期末にアイテム}\ i\ \text{が収集済み}) \end{cases} \qquad (i = 1,2, \dots, n)$
- ✓ $U_n = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_{i,n}$
- ✓ アイテムnがn期末に未収集の確率

$$\Pr[\mathcal{E}_{n,n} = 1] = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}^{-1}$$

- ✓ アイテム i ($i \leq n$)が n期末に未収集の確率

$$\Pr\left[\mathcal{E}_{i,n} = 1\right] = \left(1 - \frac{1}{i}\right)^i \left(1 - \frac{1}{i+1}\right)^{i+1} \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1-i}$$

- ✓ $\mathrm{E}[U_n] = \sum_{i=1}^{n} \Pr\left[\mathcal{E}_{i,n}\right] < \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1-i} = \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{\mathrm{e}^2} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{e}^n} < \frac{\frac{1}{\mathrm{e}}}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{1}{\mathrm{e}-1} < 0.582$

ゆっくりと増えるクーポン収集

毎日1回ガチャを引く(一様ランダム)

$\mathfrak{d}(n)$: n期の日数

U_n: n期末の未収集アイテムの種類数

命題

$\mathfrak{d}(n) = \frac{n}{2}$のとき，$\mathrm{E}[U_n] < 2.$

証明

- ✓ $\mathcal{E}_{i,n} := \begin{cases} 1 & (n\text{期末にアイテム } i \text{ が未収集}) \\ 0 & (n\text{期末にアイテム } i \text{ が収集済み}) \end{cases} \qquad (i = 1,2,\dots,n)$
- ✓ $U_n = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_{i,n}$
- ✓ アイテムnがn期末に未収集の確率

$$\Pr[\mathcal{E}_{n,n} = 1] = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} < \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

- ✓ アイテム i $(i \le n)$が n期末に未収集の確率

$$\Pr\left[\mathcal{E}_{i,n} = 1\right] = \left(1 - \frac{1}{i}\right)^{\frac{i}{2}} \left(1 - \frac{1}{i+1}\right)^{\frac{i+1}{2}} \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} < \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{n+1-i}{2}}$$

- ✓ $\mathrm{E}[U_n] = \sum_{i=1}^{n} \Pr\left[\mathcal{E}_{i,n}\right] < \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{n+1-i}{2}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{2}{2}}} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{n}{2}}} < \frac{\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}}{1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1} < 1.542$

ゆっくりと増えるクーポン収集

毎日1回ガチャを引く(一様ランダム)
$\mathfrak{d}(n)$: n期の日数
U_n: n期末の未収集アイテムの種類数

命題

$\mathfrak{d}(n) = cn$のとき，$\mathrm{E}[U_n] < \frac{1}{\mathrm{e}^c - 1}$.

証明

- ✓ アイテム i ($i \leq n$)が n期末に未収集の確率

$$\Pr[\mathcal{E}_{i,n} = 1] = \left(1 - \frac{1}{i}\right)^{ci} \left(1 - \frac{1}{i+1}\right)^{c(i+1)} \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{cn} \leq \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{c(n+1-i)}$$

- ✓ $\mathrm{E}[U_n] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[\mathcal{E}_{i,n}] \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{c(n+1-i)} = \frac{1}{\mathrm{e}^c} + \frac{1}{\mathrm{e}^{2c}} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{e}^{nc}} < \frac{\frac{1}{\mathrm{e}^c}}{1 - \frac{1}{\mathrm{e}^c}} = \frac{1}{\mathrm{e}^c - 1}$

ゆっくりと増えるクーポン下界

毎日1回ガチャを引く(一様ランダム)

$\mathfrak{d}(n)$: n期の日数

U_n: n期末の未収集アイテムの種類数

命題

$\mathfrak{d}(n) = cn$のとき，$\mathrm{E}[U_n] \geq \frac{n}{cn+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{cn} \simeq \frac{1}{c\mathrm{e}^c}$.

増えるクーポン収集

毎日1回ガチャを引く(一様ランダム)
$\mathfrak{d}(n)$: n期の日数
U_n: n期末の未収集アイテムの種類数

定理

$\mathfrak{d}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

(i) $\mathfrak{d}(i) \geq ci$ のとき，$\mathrm{E}[U_n] = \mathrm{O}(1)$.

- とくに $\frac{\mathfrak{d}(i)}{i} \xrightarrow{i\to\infty} \infty$ のとき，$\mathrm{E}[U_n] = 0$.

(ii) $\mathfrak{d}$が単調非減少で非有界かつ劣線形 ($\frac{\mathfrak{d}(i)}{i} \geq \frac{\mathfrak{d}(i+1)}{i+1}$) のとき，

$$E[U_n] = \left(1 - \mathrm{o}(1)\right)\frac{n}{\mathfrak{d}(n)+1}.$$

(iii) $\mathfrak{d}(i) = c$(定数)のとき，

$$E[U_n] = \left(1 - \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\frac{n}{c+1}.$$

$\mathfrak{d}(i) = \mathrm{o}(i)$の時，$E[U_n] \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.
(e.g., $\mathfrak{d}(i) = \lceil\sqrt{i}\rceil$,
$\mathfrak{d}(i) = \lceil\log i\rceil$ etc.)

3. 頂点が増えるグラフ上のRWの “cover time”

クーポン収集から有限グラフ上のRWへ

2. S. Kijima, N. Shimizu and T. Shiraga, How many vertices does a random walk miss in a network with a moderately increasing number of vertices?, Math OR, 2025 (to appear).

Random Walk on a Growing Graph (RWoGG)モデル

[K, Shimizu, Shiraga '21]

- **Growing graph**: (静的な)グラフの列

$$\boldsymbol{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots$$

$\mathcal{G}_t = (\mathcal{V}_t, \mathcal{E}_t)$は静的なグラフ.

便宜上，$\mathcal{V}_t \subseteq \mathcal{V}_{t+1}$を仮定.

この結果では$\mathcal{E}_t \subseteq \mathcal{E}_{t+1}$ も仮定.

Random Walk on a Growing Graph (RWoGG)モデル

[K, Shimizu, Shiraga '21]

- **Growing graph**: (静的な)グラフの列

$$\boldsymbol{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots$$

$\mathcal{G}_t = (\mathcal{V}_t, \mathcal{E}_t)$は静的なグラフ.

便宜上，$\mathcal{V}_t \subseteq \mathcal{V}_{t+1}$を仮定.

この結果では$\mathcal{E}_t \subseteq \mathcal{E}_{t+1}$ も仮定.

- **RWoGG** $(\mathfrak{d}, G, P) : X_t (t = 0,1,2, \dots) \in V^{(t)}$
  - $\mathfrak{d}(1), \mathfrak{d}(2), \mathfrak{d}(3), \dots \in \mathbb{Z}$ は duration timeを表す.
  - $T_n = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{d}(n)$とし，Growing graph は

$$\mathcal{G}_t = G^{(n)} \ \text{ for } \ t \in [T_{n-1}, T_{n-1} + \mathfrak{d}(n))$$

とする，つまり

$$\mathcal{G}_t = \begin{cases} G^{(1)} & \text{最初の}\,\mathfrak{d}(1)\text{ステップ} \\ G^{(2)} & \text{次の}\,\mathfrak{d}(2)\text{ステップ} \\ G^{(3)} & \text{次の}\,\mathfrak{d}(3)\text{ステップ} \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

  - $P^{(n)}$ は$G^{(n)}$上の推移確率行列.

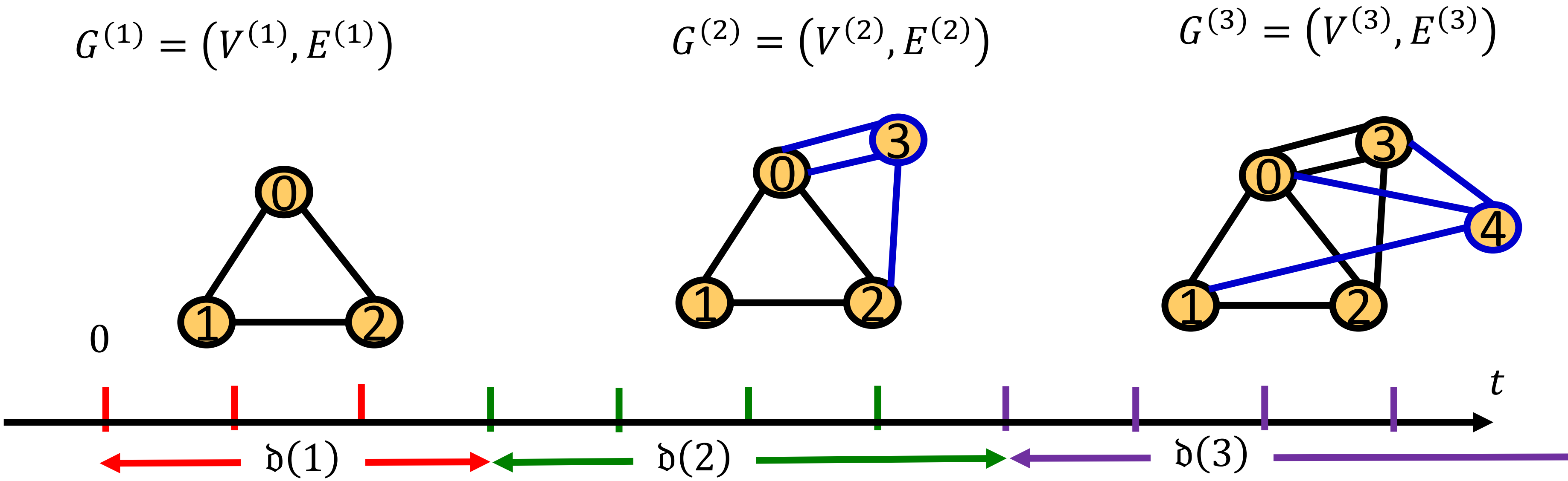
> $\mathfrak{d}$ は成長スピード（の逆数）を表す.

例 Preferential attachment $PA(d)$のRWoGG

$\mathfrak{d}(n)$: n期の日数
U_n: n期末の未訪問頂点数

$G^{(i)} = \left(V^{(i)}, E^{(i)}\right)$は再帰的に構成される:

1. 頂点 i を追加する.
2. $\deg_{i-1}(u)$に比例する確率でd個の頂点$X_1, \ldots, X_d \in V_{i-1}$を選ぶ（重複を許す.）
3. d本の枝$\{i+1, X_1\}, \ldots, \{i+1, X_d\}$を追加する.



例 Preferential attachment $PA(d)$のRWoGG

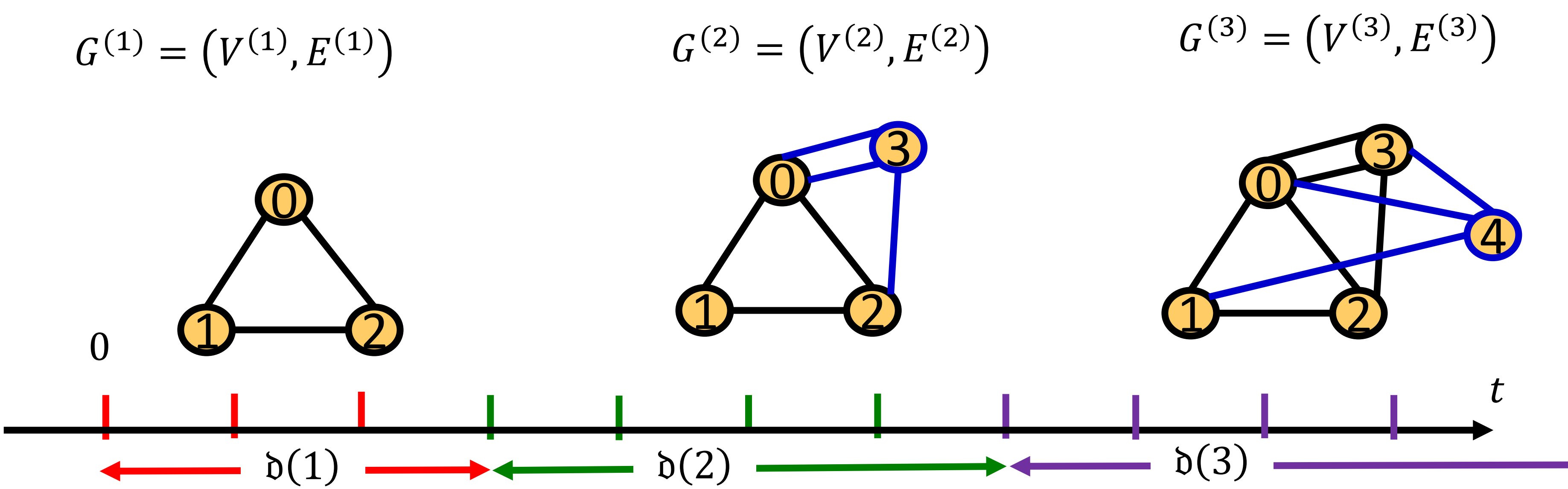
$\mathfrak{d}(n)$: n期の日数

U_n: n期末の未訪問頂点数

$G^{(i)}=\left(V^{(i)},E^{(i)}\right)$は再帰的に構成される:

1. 頂点 i を追加する.
2. $\deg_{i-1}(u)$に比例する確率でd個の頂点$X_1,\ldots,X_d\in V_{i-1}$を選ぶ
3. d本の枝$\{i+1,X_1\},\ldots,\{i+1,X_d\}$を追加する.

（重複を許す．）



定理 (Preferential attachment)

証明略

$P^{(i)}$はlazy simpleとする．$\forall\gamma>0,\exists C>0,$

$\mathfrak{d}(i)\geq Ci^{1-\gamma}$のとき，確率$1-O(n^{-1})$で$\mathrm{E}[U_n]\leq 4n^{\gamma}$.

頂点の増えるグラフ上のRW

$\mathfrak{d}(n)$: n期の日数

U_n: n期末の未訪問頂点数

定理 (一般上界)

$\mathfrak{d}(i) \geq c t_{\mathrm{hit}}(i)$ $(c > 1)$のとき，$\mathrm{E}[U] = O(1)$.

さらに$\frac{\mathfrak{d}(i)}{t_{hit}(i)} \xrightarrow{i\to\infty} \infty$なら，$\mathrm{E}[U_n] \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

証明の概略

直感的に

$$\mathrm{E}[U_n] = \sum_{k}^{n} \Pr[v_k \text{ is unvisited}] \simeq \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=k}^{n} \Pr[v_k \text{ is unvisited @ } i^{\mathrm{th}} \text{ period}]$$

厳密には

$$\mathrm{E}[U_n] \leq \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=k}^{n} \Pr[T(i) > \mathfrak{d}(i)]$$

$$T(i) = \max_{u} \min\{t \mid X_t = v, X_0 = u\} \text{ on } G^{(i)}$$

マルコフの不等式より$\Pr[T_{\mathrm{hit}}(i) > \mathfrak{d}(i)] \leq \frac{t_{\mathrm{hit}}}{\mathfrak{d}(i)}$を代入して

$$\mathrm{E}[U_n] \leq \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=k}^{n} \frac{t_{\mathrm{hit}}}{\mathfrak{d}(i)} \leq \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=k}^{n} \frac{1}{c} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c^{n-k+1}} \leq \frac{1}{c-1}$$

頂点の増えるグラフ上のRW

$\mathfrak{d}(n)$: n期の日数

U_n: n期末の未訪問頂点数

定理 (lazy reversible)

$P^{(i)}$はlazy reversibleとする.

$\mathfrak{d}(i) \geq \frac{t_{\mathrm{hit}}(i)}{N} + 2t_{\mathrm{mix}}(i)$ のとき，$\mathrm{E}[U_n] \leq 8N + 32$.

$T_\pi(i) = \max_u \min\{t | X_t = v, X_0 \sim \pi\}$ on $G^{(i)}$

証明の雰囲気

- Lazy reversibleに対して$\Pr[T_\pi(i) > t] \leq \left(1 - \frac{1}{t_{\mathrm{hit}}}\right)^t \leq \exp\left(-\frac{t}{t_{\mathrm{hit}}}\right)$ by [Oliveira Peres 2019]
- $\mathrm{E}[U_n] \leq \sum_{k=1}^n \prod_{i=k}^n \Pr[T_{\mathrm{hit}}(i) > \mathfrak{d}(i)]$を上から押さえたい.

$$\Pr[T_{\mathrm{hit}}(i) > \mathfrak{d}(i)] = \sum_v \Pr\left[X_{2t_{\mathrm{mix}}} = v\right] \Pr\left[T_{\mathrm{hit}}(i) > \mathfrak{d}(i) \middle| X_{2t_{\mathrm{mix}}} = v\right]$$

$$\leq \Pr\left[T_\pi(i) > \frac{t_{\mathrm{hit}}(i)}{N}\right] + \frac{3}{4} \leq \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{1}{N}\right) + \frac{3}{4}$$

- $\mathrm{E}[U_n] \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4}\exp\left(-\frac{1}{N}\right) + \frac{3}{4}\right)^{n-k+1} \leq \sum_{k=1}^n \left(\exp\left(-\frac{k}{32}\right) + \exp\left(-\frac{k}{8N}\right)\right) \leq 32 + 8N$

5. まとめ

参入お待ちしてます.

まとめ

頂点が増えるグラフ上のRWの解析

- ✓ **“Cover time”**
  - ➢ 増えるクーポン収集問題
  - ➢ 期間$\mathfrak{d}$と未訪問数$\mathrm{E}[U_n]$の関係
- ✓ **再帰性**

今後の課題

- ✓ 正則グラフならもっと早く成長してもcoverできるか？
- ✓ Cover time、再帰性以外の指標
  - ➢ 時刻tの分布
  - ➢ “mixing time”
    - • Conductanceの研究は少しある [Dembo et al. 2017]
- ✓ 頂点が増える＋辺接続も変化する
  - ➢ 「適当な」条件

参考文献

1. 来嶋秀治, 清水伸高, 白髪丈晴, 動的グラフ上のランダムウォーク, 応用数理, 32:1 (2022), 5--15.
2. S. Kijima, N. Shimizu and T. Shiraga, How many vertices does a random walk miss in a network with a moderately increasing number of vertices?, Mathematics of Operations Research, to appear.
3. S. Kumamoto, S. Kijima and T. Shirai, An analysis of the recurrence/transience of random walks on growing trees and hypercubes, LIPIcs, 302 (AofA 2024), 22:1--22:15.
4. S. Kumamoto, S. Kijima and T. Shirai, An analysis of the recurrence/transience of random walks on growing trees and hypercubes, LIPIcs, 292 (SAND 2024), 17:1-17:17.

The end

Thank you for the attention.

ゆっくりと増えるクーポン下界

毎日1回ガチャを引く(一様ランダム)

$\mathfrak{d}(n)$: n期の日数

U_n: n期末の未収集アイテムの種類数

命題

$\mathfrak{d}(n) = cn$のとき，$\mathrm{E}[U_n] \geq \frac{n}{cn+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{cn} \simeq \frac{1}{ce^c}$.

証明

- ✓ $E[U_n] = \sum_{k=1}^{n}\prod_{i=k}^{n}\left(1-\frac{1}{i}\right)^{ci} =: S(n)$
- ✓ Proposition $S(n) \geq \frac{n}{cn+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{cn}$.
  - Claim 1: $S(n+1) = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{c(n+1)}(S(n)+1)$.
  - Claim 2: $S(n) \geq \frac{n}{cn+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{cn} \Rightarrow S(n)+1 \geq \frac{n+1}{c(n+1)+1}$.
  - 帰納法として,

$$
\begin{aligned}
S(n+1) &= \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{c(n+1)}(S(n)+1) \\
&\geq \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{c(n+1)}\frac{n+1}{c(n+1)+1}
\end{aligned}
$$

- Proof of Claim 1

$$\begin{aligned}
S(n+1) &= \sum_{k=1}^{n+1}\prod_{i=k}^{n+1}\left(1-\frac{1}{i}\right)^{ci} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\prod_{i=k}^{n+1}\left(1-\frac{1}{i}\right)^{ci} + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{c(n+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{c(n+1)}\prod_{i=k}^{n}\left(1-\frac{1}{i}\right)^{ci} + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{c(n+1)} \\
&= \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{c(n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=k}^{n}\left(1-\frac{1}{i}\right)^{ci} + 1\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{c(n+1)}(S(n)+1)
\end{aligned}$$

- Proof of Claim 2

$$\begin{aligned}
S(n)+1 &\geq \frac{n}{cn+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{cn} + 1 \\
&\geq \frac{n}{cn+1}\left(1-\frac{cn}{n}\right) + 1 \\
&= \frac{n}{cn+1}\frac{n-cn}{n} + 1 = \frac{n-cn}{cn+1} + 1 = \frac{n+1}{cn+1} \geq \frac{n+1}{c(n+1)+1}
\end{aligned}$$

ゆっくりと増えるクーポン収集

補題(S_nの性質)

$\mathfrak{d}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $S(n) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=k}^{n} \left(1 - \frac{1}{i}\right)^{\mathfrak{d}(i)}$

(i) $\mathfrak{d}(i) \geq ci$ のとき, $S(n) = O(1)$.

(ii) $\mathfrak{d}$が単調非減少 ($\mathfrak{d}(i) \leq \mathfrak{d}(i+1)$) のとき,

$$S(n) \geq \frac{n}{\mathfrak{d}(n)+1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\mathfrak{d}(n)}.$$

(iii) $\mathfrak{d}$が劣線形 ($\frac{\mathfrak{d}(i)}{i} \geq \frac{\mathfrak{d}(i+1)}{i+1}$) のとき, $S(n) \leq \frac{n}{\mathfrak{d}(n)}$.

(iv) $\mathfrak{d}(i) = c$ (定数)のとき, $S(n) \leq \frac{n}{c+1}$.

Claim.

$$S(n+1) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{\mathfrak{d}(n+1)} \left(S(n) + 1\right)$$

Proof

$$\begin{aligned}
S(n+1) &= \sum_{k=1}^{n+1} \prod_{i=k}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{i}\right)^{\mathfrak{d}(i)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=k}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{i}\right)^{\mathfrak{d}(i)} + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{\mathfrak{d}(n+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{\mathfrak{d}(n+1)} \prod_{i=k}^{n} \left(1 - \frac{1}{i}\right)^{\mathfrak{d}(i)} + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{\mathfrak{d}(n+1)} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{\mathfrak{d}(n+1)} \left(\sum_{k=1}^{n} \prod_{i=k}^{n} \left(1 - \frac{1}{i}\right)^{\mathfrak{d}(i)} + 1\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{\mathfrak{d}(n+1)} \left(S(n) + 1\right)
\end{aligned}$$