



12. Bipartite perfect matching

来嶋 秀治

滋賀大学 データサイエンス学部

PERMANENT

M. Jerrum, A. Sinclair and E. Vigoda, A polynomial-time approximation algorithm for the permanent of a matrix with nonnegative entries, Journal of the ACM, 51 (4): 671–697, 2004.

(2006年Fulkerson Prize)

□ 二部グラフ: $G = (U, V; E)$.

- 完全マッチングを考えるときは $|U| = |V| = n$ とする.

□ マッチング: $\mathcal{M} = \{M \subseteq E \mid \forall e, f \in M \ (e \neq f), e \cap f = \emptyset\}$

- サイズ k マッチング: $\mathcal{M}_k = \{M \mid |M| = k\}$; $\mathcal{M} = \bigcup_{k=0}^n \mathcal{M}_k$
- 完全マッチング: $\mathcal{P} = \mathcal{M}_n$

**Q. 二部グラフの完全マッチングの個数を求める
FPRASは存在するか？ (1979～2004)**

□ $m_k = |\mathcal{M}_k|$

□ Permanent

$$\text{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n A_{i, \sigma_i}$$

□ $A_{ij} = \begin{cases} 1 & \{i, j\} \in E \\ 0 & \{i, j\} \notin E \end{cases}$ のとき $\text{per}(A) = m_n$

アルゴリズムのアイデア 1/2

- $\mathcal{P}$: 完全マッチング ← 求めたいのは $|\mathcal{P}|$
- $\mathcal{N}_{u,v}$: u - v hole $n-1$ マッチング
- $w(u, v) = \frac{|\mathcal{P}|}{|\mathcal{N}_{u,v}|}$ とすると,

$$m_n + m_{n-1} = |\mathcal{P}| + \sum_{uv} |\mathcal{N}_{u,v}| = |\mathcal{P}| \left(1 + \sum_{uv} \frac{|\mathcal{N}_{u,v}|}{|\mathcal{P}|} \right) = |\mathcal{P}| \left(1 + \sum_{uv} \frac{|1|}{w(u,v)} \right)$$
 - $m_n + m_{n-1}$ の推定はできるので, **$w(u, v)$ が推定できれば良い.**
- [注意] 最悪ケースで $w(u, v) \leq O\left(2^{-\frac{n}{6}}\right)$ なので, 素朴には推定しづらい.
 - 枝に重みをつけて, $w(u, v) = O(1)$ を目指す!?

$$|\mathcal{P}| = \frac{m_n + m_{n-1}}{1 + \sum_{uv} \frac{|1|}{w(u, v)}}$$

アルゴリズムのアイデア 2/2

■ $w(u, v)$ が推定できれば良い.

■ 枝に重みをつけて, $w(u, v) = O(1)$ を目指す!?

- 枝重み $\alpha(e)$ とし, マッチング重みを $\psi(M) = \prod_{e \in M} \alpha(e)$ とする.
- $\psi(\mathcal{P}) = \sum_{M \in \mathcal{P}} \psi(M)$, $\psi(\mathcal{N}_{uv}) = \sum_{M \in \mathcal{N}_{uv}} \psi(M)$ として,

$$w(u, v; \alpha) = \frac{\psi(\mathcal{P})}{\psi(\mathcal{N}_{uv})} \text{ と(少し)一般化.}$$

➤ $\alpha(e) = 1 (e \in E), \alpha(e) = 0 (e \notin E)$ とすれば, $w(u, v) = w(u, v; \alpha)$.

$$\pi(M) \propto \begin{cases} \psi(M) & M \in \mathcal{P} \\ w(u, v; \alpha)\psi(M) & M \in \mathcal{N}_{uv} \end{cases}$$

からサンプリングすれば, $\frac{\psi(M)}{\psi(\mathcal{N}_{uv})} = O(1)$ (しかし, $w(u, v)$ は不明!)

- $\alpha(e) = 1 (e \in U \times V)$ とすれば, $w(u, v; \mathbf{1})$ は自明なので,
そこから少しずつ α を変化させて $w(u, v; \alpha)$ を見積もる.

アルゴリズム (概略)

- 初期設定はすべての $e \in U \times V$ について $\alpha_0(e) = 1$.
- $\psi_0(M) = \prod_{e \in M} \alpha_0(e)$. $w_0(u, v) = \frac{\psi_0(\mathcal{P})}{\psi_0(\mathcal{N}_{uv})} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$.
- $e \notin E$ を任意に一つ選び,

$$\alpha_r(e') = \begin{cases} \frac{\alpha_{r-1}(e')}{2} & e' = e \\ \alpha_{r-1}(e') & e' \neq e \end{cases}$$

- $\psi_r(M) = \prod_{e \in M} \alpha_r(e)$
- $\psi_r(\mathcal{P}) = \sum_{M \in \mathcal{P}} \psi_r(M)$
- $\psi_r(\mathcal{N}_{uv}) = \sum_{M \in \mathcal{N}_{uv}} \psi_r(M)$

- すべての $(u, v) \in U \times V$ について, $w_r(u, v) = \frac{\psi_r(\mathcal{P})}{\psi_r(\mathcal{N}_{uv})}$ を推定:

$$\pi_r(M) \propto \begin{cases} \psi_r(M) & M \in \mathcal{P} \\ w_{r-1}(u, v) \psi_r(M) & M \in \mathcal{N}_{uv} \end{cases}$$

からサンプリングすると, $w_r(u, v) = \frac{\pi_r(\mathcal{P})}{\pi_r(\mathcal{N}_{uv})} w_{r-1}(u, v)$.

- すべての $e \notin E$ に対して $\alpha_R(e) \ll \frac{1}{n!}$ となったら終了.
 ➤ 所望の $w_R(u, v)$ を得る.

反復回数は高々 $n^2 \log_2(n \cdot n!) \simeq O(n^3 \log n)$

証明すべきこと

補題 12.1.

$\mathcal{M}_n \cup \mathcal{M}_{n-1}$ 上のマルコフ連鎖は, 定常分布

$$\pi_r(M) \propto \begin{cases} \psi_r(M) & M \in \mathcal{P} \\ w_{r-1}(u, v) \psi_r(M) & M \in \mathcal{N}_{uv} \end{cases}$$

に従うMetropolis-Hastingsとする.

$\frac{w_r(u, v)}{2} \leq w_{r-1}(u, v) \leq 2w_r(u, v)$ を満たすとき, Mixing timeは
 $\tau(\epsilon) = O(n^6(\log n + \log \epsilon^{-1}))$

補題 12.2.

$\text{poly}(n, \epsilon^{-1}, \log \delta^{-1})$ 回のサンプルで,

$$\Pr \left[\frac{w_r(u, v)}{1 + \epsilon} \leq \hat{w}_r(u, v) \leq (1 + \epsilon)w_r(u, v) \right] \geq 1 - \delta$$

定理 12.3. [JSV04]
 $|\mathcal{P}|$ のFPRASが存在.

拡張

定理 12.4. [JSV04]
 $\text{per}(A)$ のFPRASが存在.



おわり
