11. Bipartite matching

来嶋 秀治

滋賀大学 データサイエンス学部

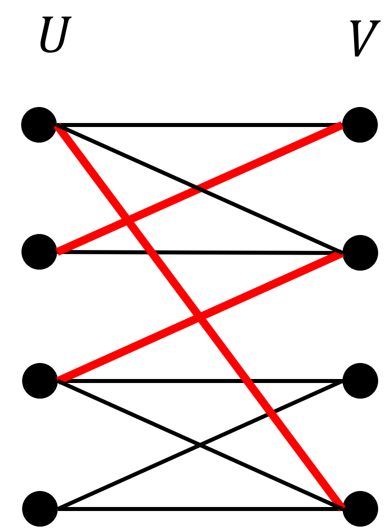
BIPARTITE MATCHING

M. Jerrum, A. Sinclair, Approximating the permanent, *SIAM Journal on Computing,* **18**(6): 1149–1178, 1989. (1996年Gödel Prize)

- 二部グラフ: $G = (U, V; E)$. $|E| = m$とする.
  - 完全マッチングを考えるときは$|U| = |V| = n$とする.
- マッチング: $\mathcal{M} = \{M \subseteq E \mid \forall e, f \in M \ (e \neq f), e \cap f = \emptyset\}$
  - サイズkマッチング: $\mathcal{M}_k = \{M \mid |M| = k\}$; $\mathcal{M} = \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{M}_k$
  - 完全マッチング: $\mathcal{P} = \mathcal{M}_n$

Q. 二部グラフの完全マッチングの個数を求めるFPRASは存在するか？ (1979～2004)

➢ $\mathcal{P}$の多項式時間一様サンプリングができればOK(初日参照)



$\alpha \geq 1$を想定

とりあえず

- 目標分布：$\pi(M) = \frac{1}{C}\alpha^{|M|}$ $(M \in \mathcal{M})$

マルコフ連鎖

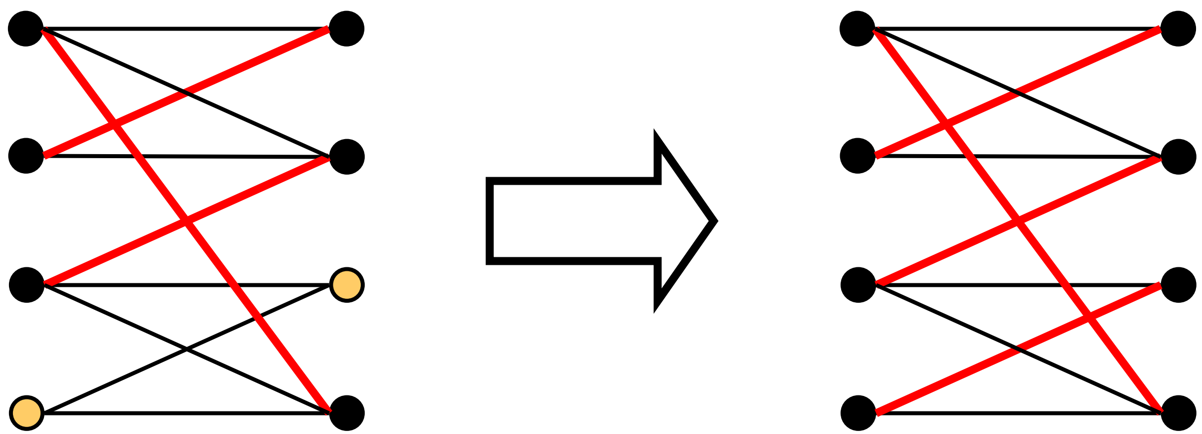
Markov chain for $\mathcal{M}$

- 確率1/2で現状維持
- $e \in E$を一様ランダムに選ぶ
  - 追加: 追加できるなら追加
  - 削除: 削除できるなら削除
  - 交換: フリップで済むならフリップ
  - 維持: それ以外は現状維持

マルコフ連鎖

Markov chain for $\mathcal{M}$

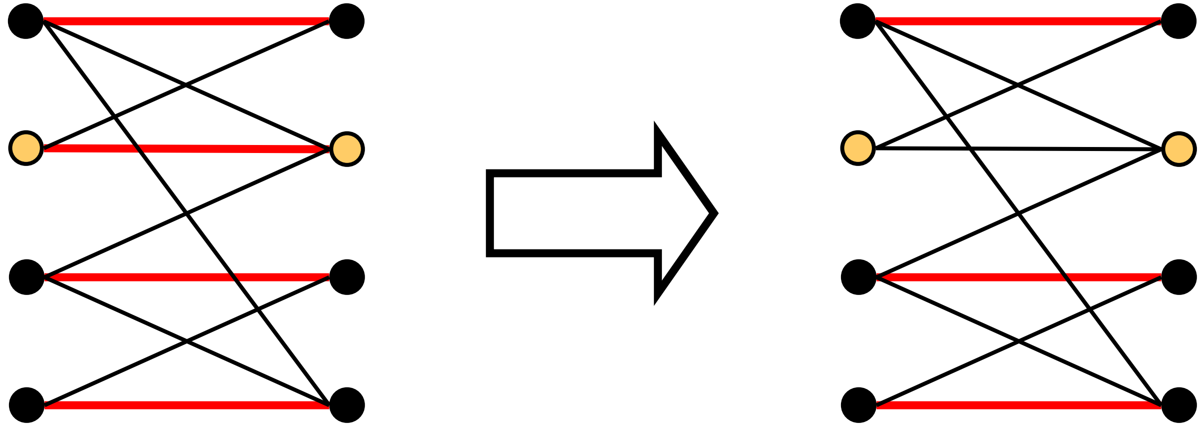
- 確率1/2で現状維持
- $e \in E$を一様ランダムに選ぶ
  - **追加**: 追加できるなら追加
  - 削除: 削除できるなら削除
  - 交換: フリップで済むならフリップ
  - 維持: それ以外は現状維持



マルコフ連鎖

Markov chain for $\mathcal{M}$

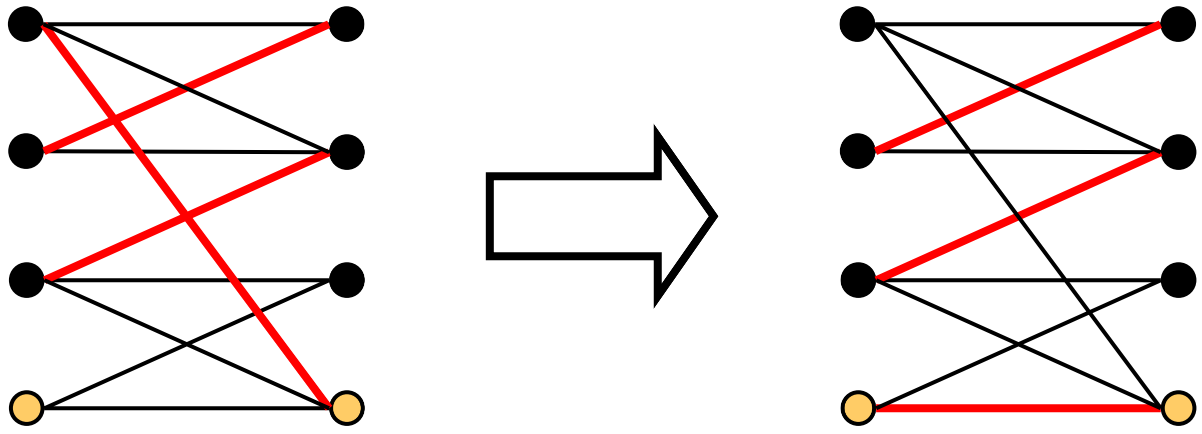
- 確率1/2で現状維持
- $e \in E$を一様ランダムに選ぶ
  - 追加: 追加できるなら追加
  - **削除**: 削除できるなら削除
  - 交換: フリップで済むならフリップ
  - 維持: それ以外は現状維持



マルコフ連鎖

Markov chain for $\mathcal{M}$

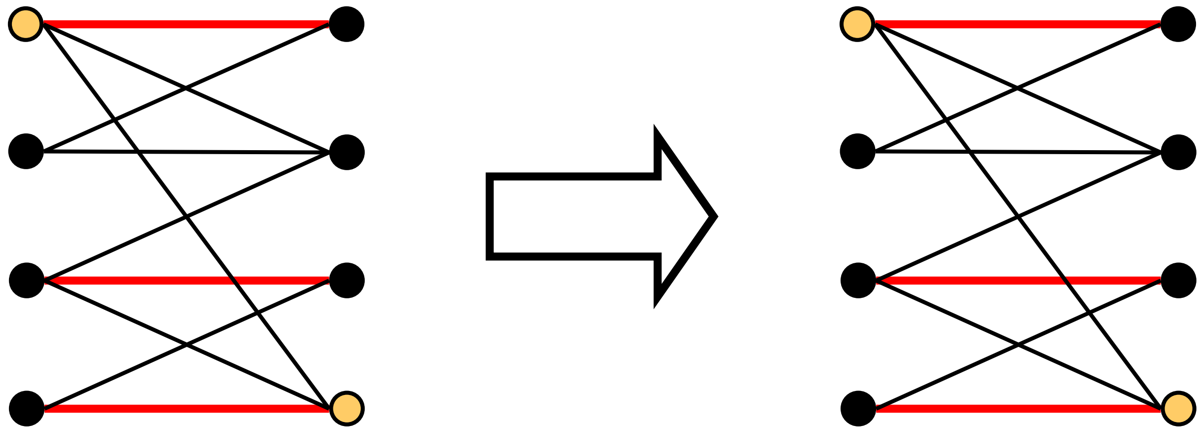
- 確率1/2で現状維持
- $e \in E$を一様ランダムに選ぶ
  - 追加: 追加できるなら追加
  - 削除: 削除できるなら削除
  - **交換**: フリップで済むならフリップ
  - 維持: それ以外は現状維持



マルコフ連鎖

Markov chain for $\mathcal{M}$

- 確率1/2で現状維持
- $e \in E$を一様ランダムに選ぶ
  - 追加: 追加できるなら追加
  - 削除: 削除できるなら削除
  - 交換: フリップで済むならフリップ
  - **維持**: それ以外は現状維持



Markov chain for $\mathcal{M}$

- 確率1/2で現状維持
- $e \in E$を一様ランダムに選ぶ
  - 追加: 追加できるなら追加
  - 削除: 削除できるなら削除
  - 交換: フリップで済むならフリップ
  - 維持: それ以外は現状維持
- Metropolis-Hastingsで遷移 $\left(\min\left\{1, \alpha^{|M'|-|M|}\right\}\right)$

正確に記述せよ[ex]

証明せよ[ex]

定理 11.1.

マルコフ連鎖は既約で非周期的． 定常分布は$\pi(M) = \frac{1}{C}\alpha^{|M|}$ $(M \in \mathcal{M})$.

定理 11.2.

$$\tau(\epsilon) = O\left(\alpha^3 mn(n \log \alpha + m + \log \epsilon^{-1})\right)$$

定理12.2の証明の概略

- [仮定] 頂点を$\{1, \dots, n\}$とする.
- フローf：マッチング$x \subseteq E$からマッチング$y \subseteq E$
  経路$p(x, y)$を作って$p(x, y)$上に$R(x, y) = \pi(x)\pi(y)$流す
  1. $x \oplus y$ をつくる．交互道の最小頂点番号の順番に$C_1, \dots, C_k$とする.
  2. 削除，交換，追加で遷移する．枝の数が減らないように注意する.
- エンコード

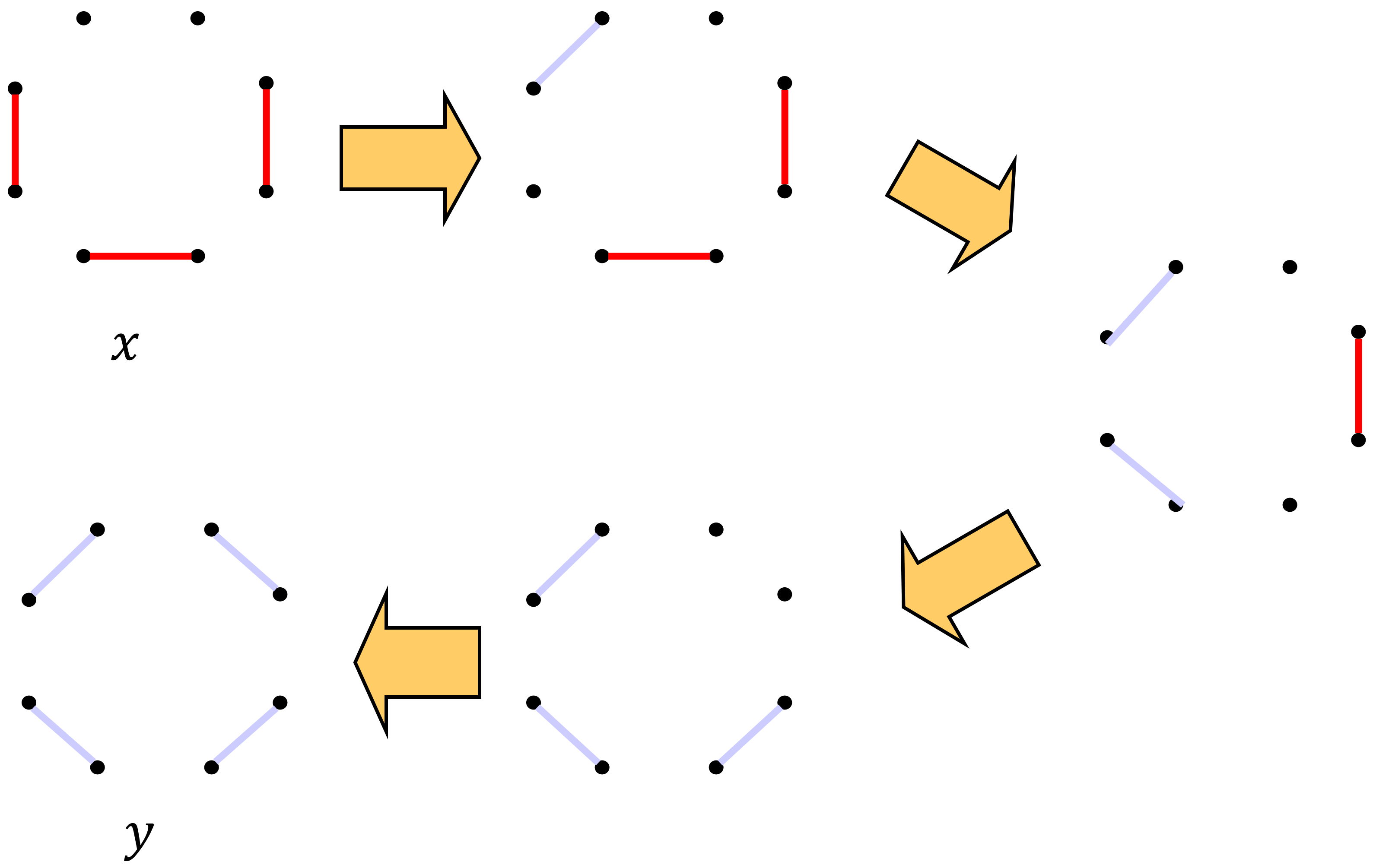
$$\eta_{z,z'}(x, y) = x \oplus y \oplus (z \cup z') \setminus \{e_1\}$$

- Claim 1: $\eta_{z,z'}$は単射
  - 証明: $w = \eta_{z,z'}(x, y)$ のdecode $\eta_{z,z'}^{-1}(w) = (x, y)$ を確認する.
    - ✓ $w \oplus (z \cup z') = x \oplus y \setminus \{e_1\}$
- Claim 2: $\pi(x)\pi(y) \leq \alpha^2 \pi(z)\pi\big(\eta_t(x, y)\big)$
  - 証明: $|x| + |y| \leq |z| + |\eta_t(x, y)| + 2$より

$$\frac{\pi(z)\pi\big(\eta_t(x, y)\big)}{\pi(x)\pi(y)} = \frac{\alpha^{|z| + |\eta_t(x,y)|}}{\alpha^{|x| + |y|}} \geq \alpha^2$$

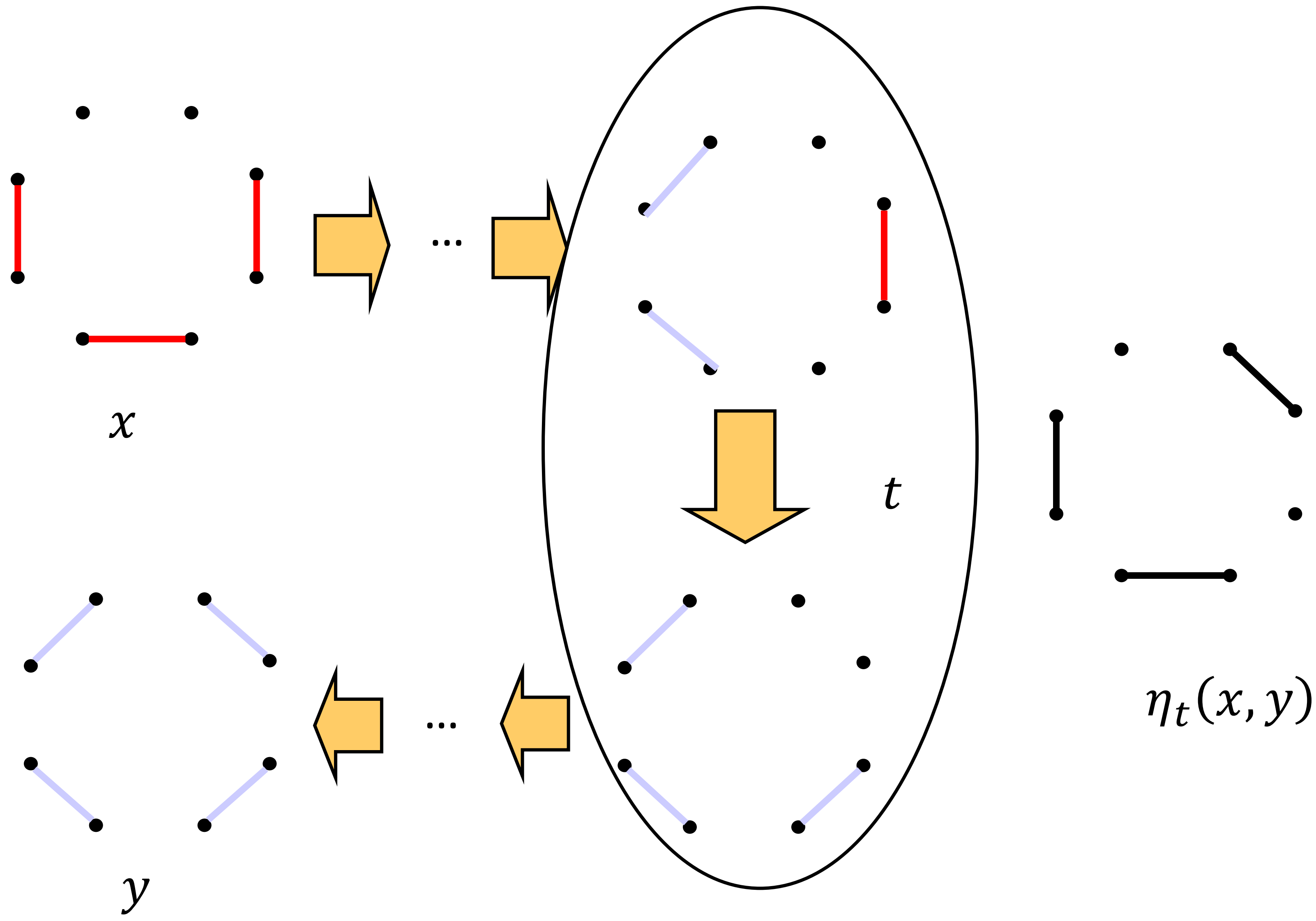
Canonical path（開路）

閉路と開路で展開の向きを変える



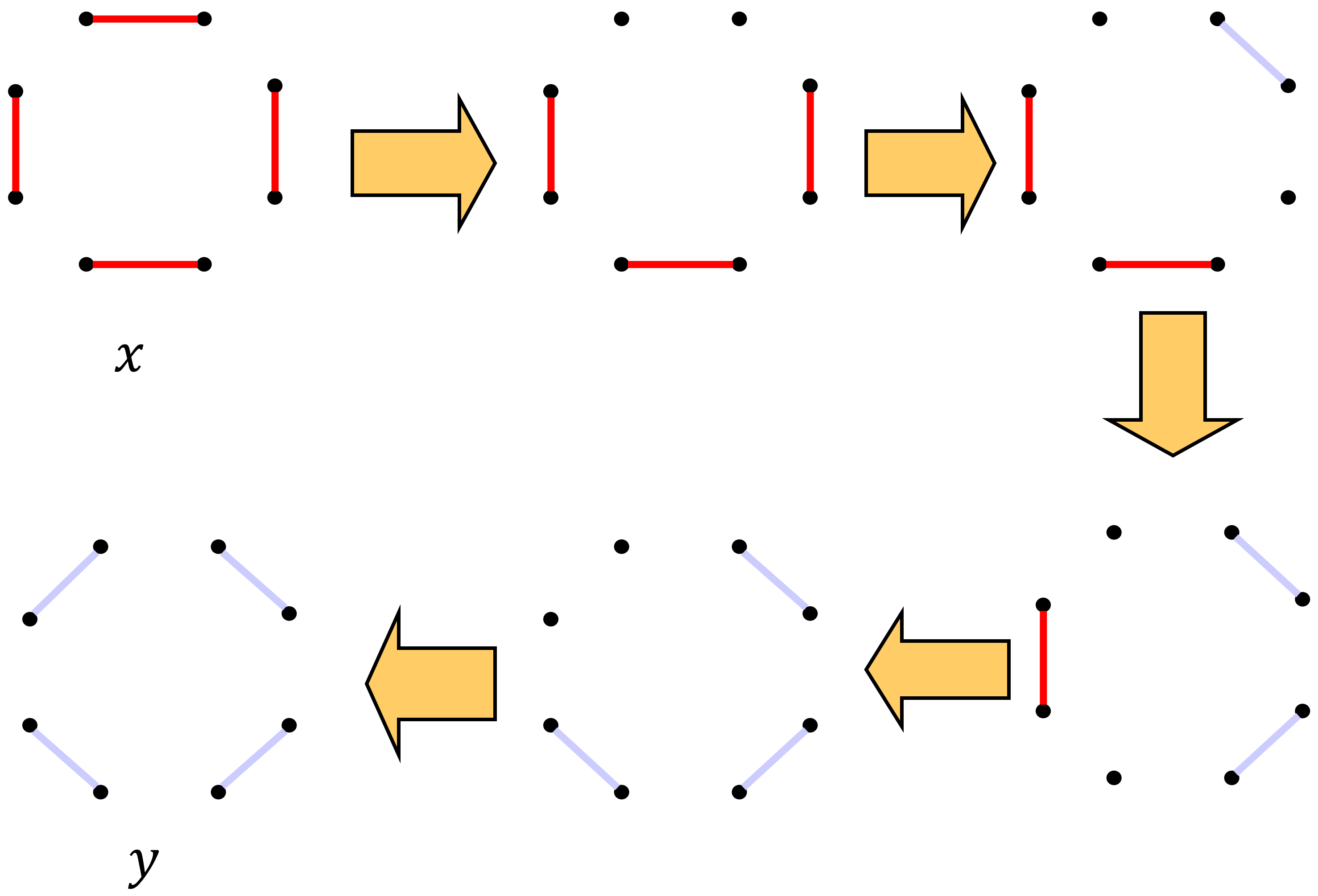
encoding

$$\eta_{z,z'}(x, y) = x \oplus y \oplus (z \cup z') \setminus \{e_1\}$$

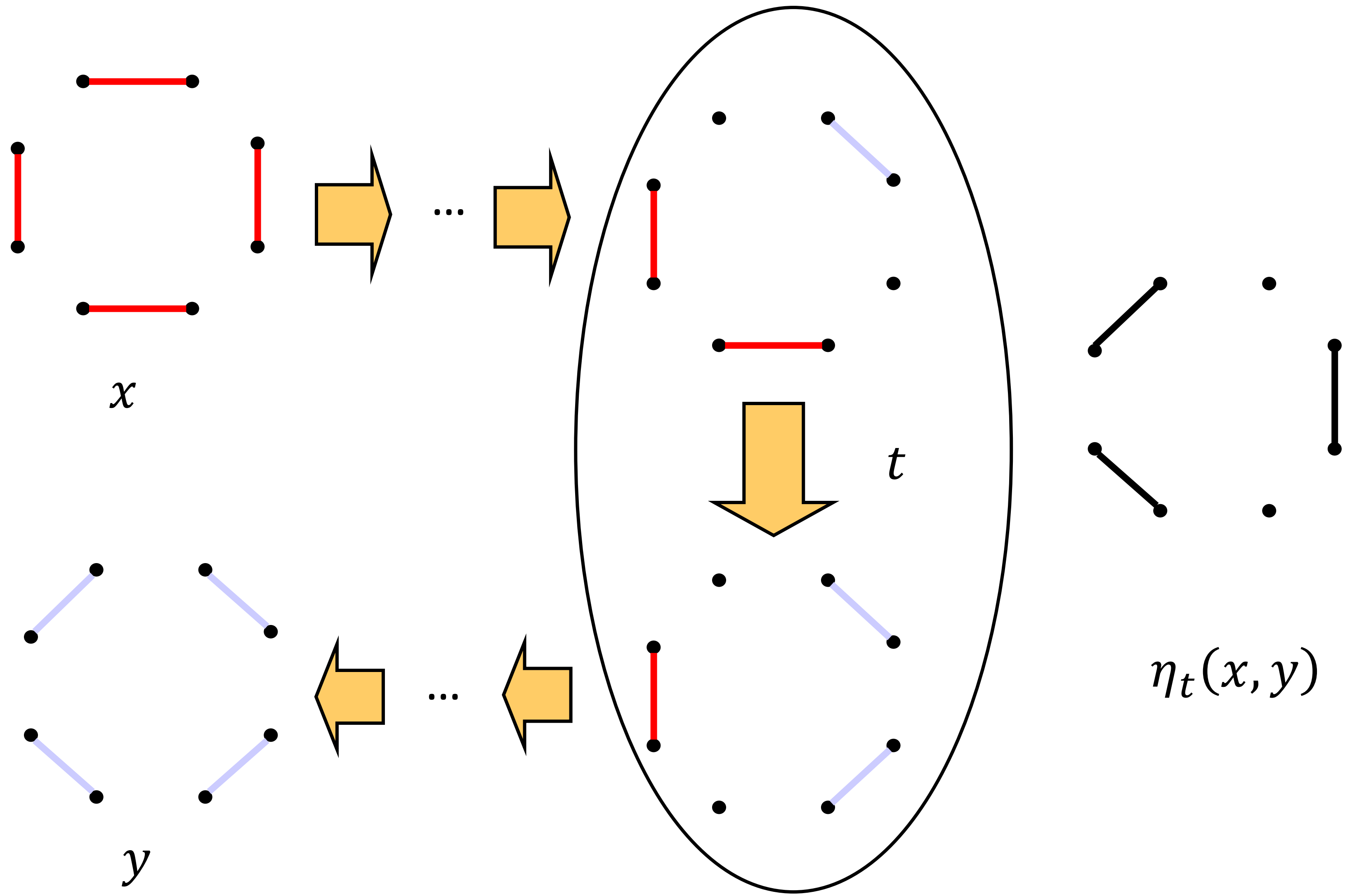


Canonical path（閉路）

閉路と開路で展開の向きを変える



encoding $\qquad \eta_{z,z'}(x,y) = x \oplus y \oplus (z \cup z') \setminus \{e_1\}$



- $P(z,z') \geq \frac{1}{2\alpha m}$に注意して，定理を使うと
$$\rho(f) \leq \beta \frac{1}{P(z,z')} \leq \alpha^2 2\alpha m = 2\alpha^3 m$$
- よって
$$\frac{1}{1-\lambda_2} \leq \rho(f) l(f) \leq 2\alpha^3 mn$$
- $\pi_{\min} \geq \frac{1}{\alpha^n}\frac{1}{2^m}$ ($\alpha \geq 1$の場合)，mixing timeは
$$\tau \leq \frac{\log \frac{1}{\pi_{\min}}}{1-\lambda_2} \leq 2\alpha^3 mn \log(\alpha^n 2^m)$$
$$= 2\alpha^3 mn(n \log \alpha + m) = \mathrm{poly}(n, m, \alpha)$$

Markov chain for $\mathcal{M}$

- 確率1/2で現状維持
- $e \in E$を一様ランダムに選ぶ
  - 追加: 追加できるなら追加
  - 削除: 削除できるなら削除
  - 交換: フリップで済むならフリップ
  - 維持: それ以外は現状維持
- Metropolis-Hastingsで遷移 $\left(\min\left\{1, \alpha^{|M'|-|M|}\right\}\right)$

定理 11.2. (再掲)

$$\tau(\epsilon) = O\left(\alpha^3 mn(n \log \alpha + m + \log \epsilon^{-1})\right)$$

- $|\mathcal{M}|$のFPRASを設計せよ.
- $\mathcal{M}_n \cup \mathcal{M}_{n-1}$上に制限したマルコフ連鎖を設計せよ.
  $\tau = O\left(a^3 mn(n \log a + m)\right)$を示せ.
- $|\mathcal{M}_n \cup \mathcal{M}_{n-1}|$のFPRASを設計せよ.

演習

完全マッチングの個数

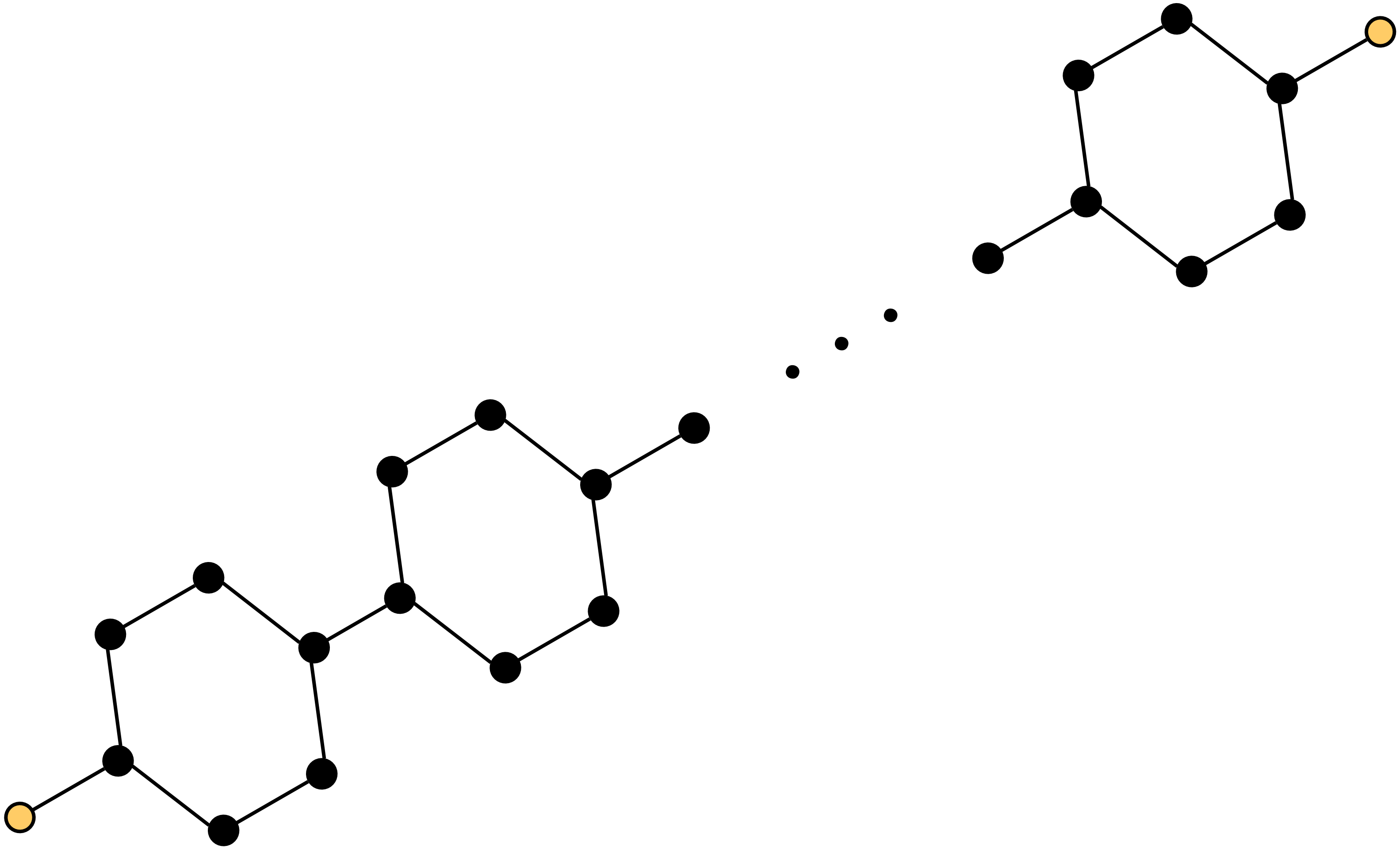
- $|\mathcal{M}_n \cup \mathcal{M}_{n-1}|$ はFPRASの設計可能.
- $|\mathcal{M}_n|$ のFPRAS？

命題 11.3.
$\alpha = 1$としたとき，$\mathcal{M}_n \cup \mathcal{M}_{n-1}$上で$X \sim \pi$が
$$\Pr[X \in \mathcal{M}_n] \leq 2^{-\frac{n-2}{6}}$$
となる例が存在する.

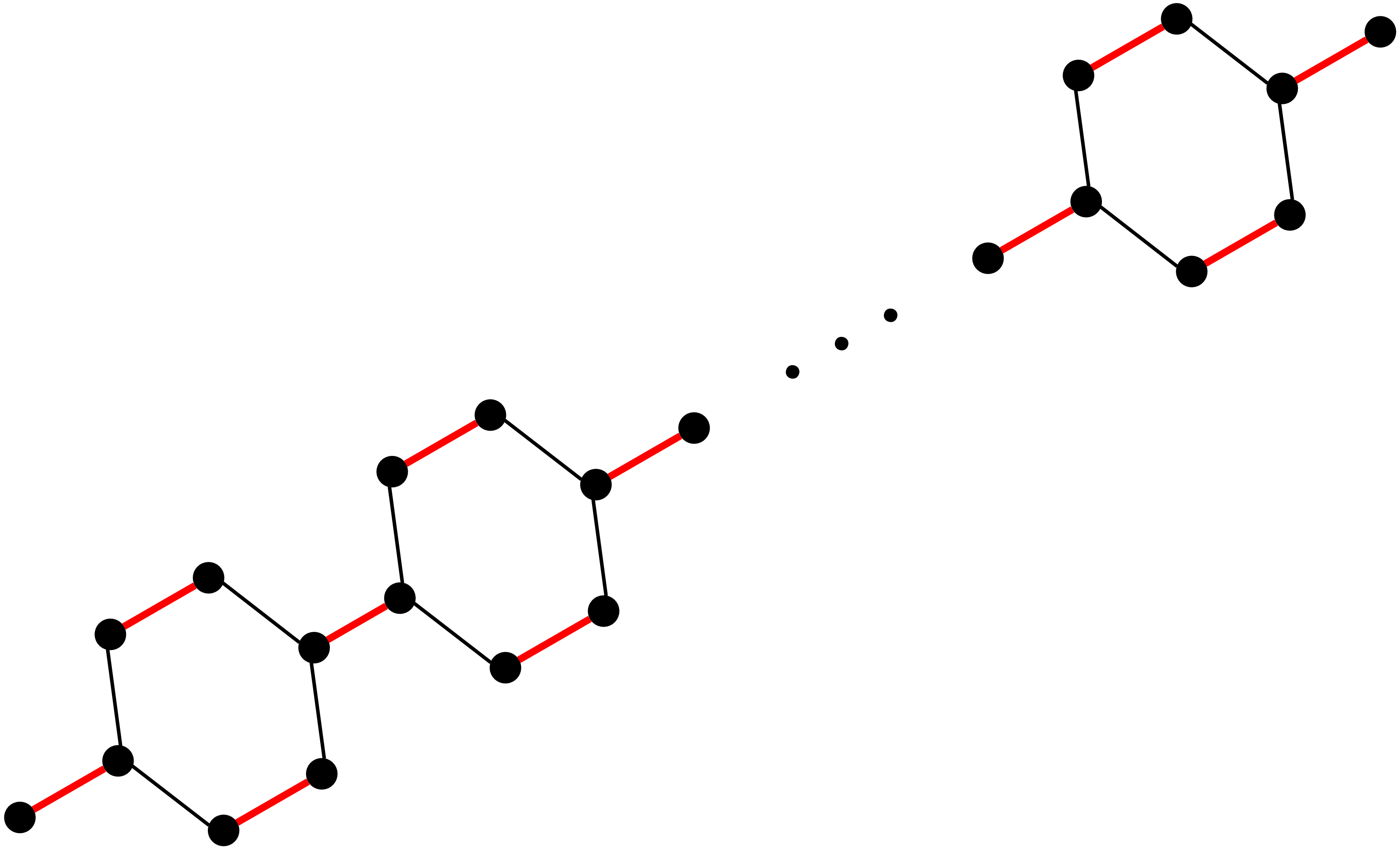
$2^{-\frac{n-2}{4}}$に改善可[ex]

つまり，$|\mathcal{M}_n|$ のFPRASが直接は導けない.

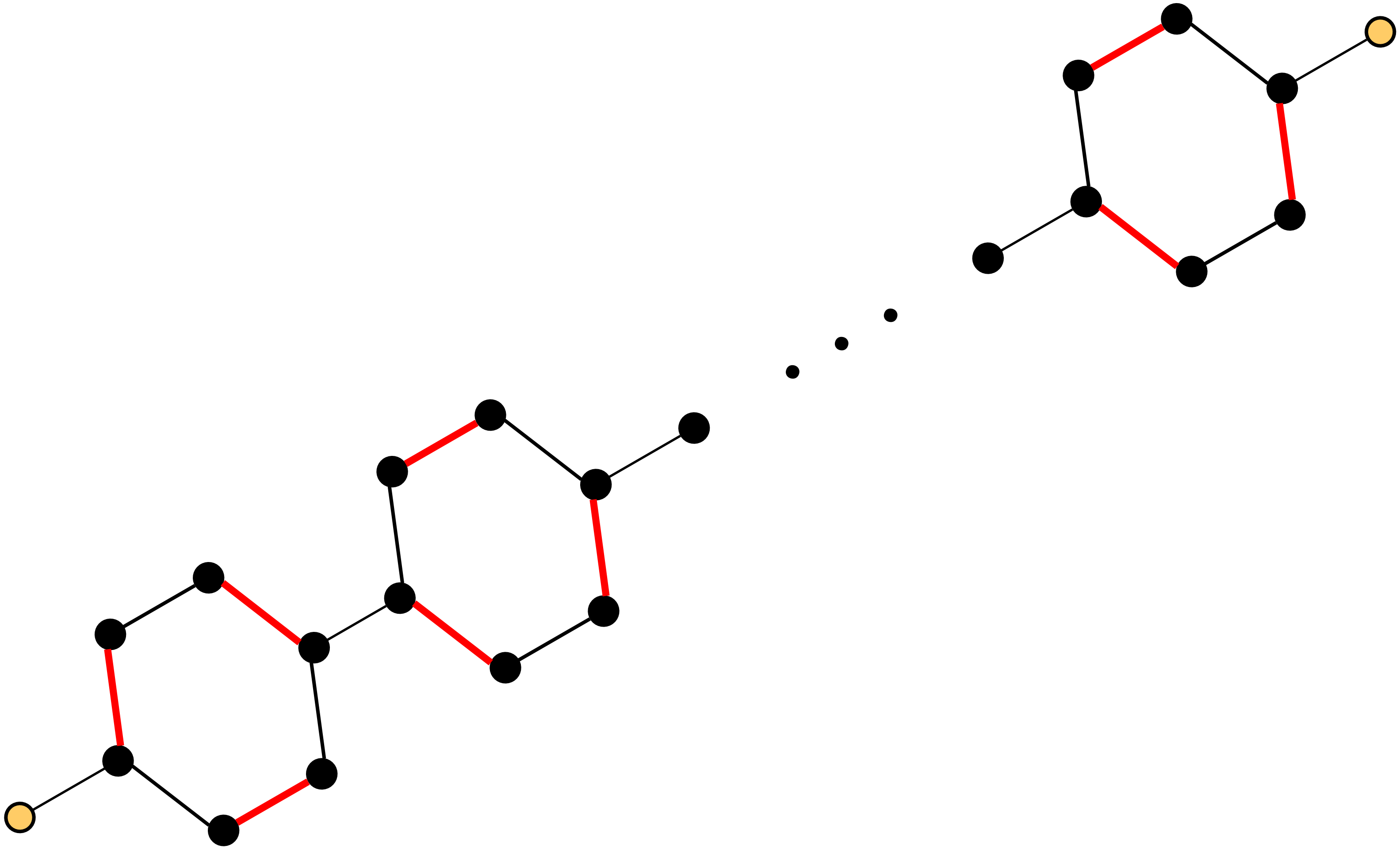
$|\mathcal{M}_n|/|\mathcal{M}_n \cup \mathcal{M}_{n-1}|$



$|\mathcal{M}_n| / |\mathcal{M}_n \cup \mathcal{M}_{n-1}|$



$|\mathcal{M}_n| / |\mathcal{M}_n \cup \mathcal{M}_{n-1}|$



おわり