

6. Path coupling

来嶋 秀治

滋賀大学 データサイエンス学部

PATH COUPLING

定理 6.1. (path coupling)

距離 $d(x, y)$ は辺長 $l(\{u, v\})$ の無向グラフ $G = (V, E; l)$ 上の最短経路長とする. ただし $\min_{x \neq y} d(x, y) \geq 1$ とし, また

$D = \max_{x, y} d(x, y)$ とする. Coupling (X, Y) に対して,

ある α ($0 < \alpha < 1$)が存在して, 任意の $x, y \in E$ に対して

$$E[d(X', Y')] \leq (1 - \alpha)d(x, y) \quad (*)$$

を満たすとき, mixing timeは

$$\tau_{\text{mix}} \leq \alpha^{-1}(\ln D + \ln \epsilon^{-1})$$

□ まず, 条件(*)の下 $E[d(X', Y')] \leq (1 - \alpha)E[d(X, Y)]$ を示す.

- 任意の x, y に対して $x = z_0, z_1, \dots, z_r = y$ は最短経路とする; i.e., $\{z_i, z_{i+1}\} \in E$.
- Couplingにより $z_i \mapsto Z'_i$ へと遷移するものとする. $\{Z'_i, Z'_{i+1}\} \in E$ とは限らない.
- 任意の x, y に対して

$$E[d(X', Y')] = \sum_{i=0}^{r-1} E[d(Z'_i, Z'_{i+1})] \leq (1 - \alpha) \sum_{i=0}^{r-1} d(z_i, z_{i+1}) = (1 - \alpha)d(x, y)$$

- したがって, 任意の確率変数 X, Y に対しても題意を得る.

□ 帰納的に $E[d(X_t, Y_t)] \leq (1 - \alpha)^t E[d(X_0, Y_0)] \leq (1 - \alpha)^t D$ を得る.

□ Coupling Lemmaより $d_{TV}(P^t, \pi) \leq \Pr[X_t \neq Y_t]$.

$$\begin{aligned} \Pr[X_t \neq Y_t] &= \Pr[d(X_t, Y_t) \geq 1] && \left(\min_{x \neq y} d(x, y) \geq 1 \text{ より} \right) \\ &\leq E[d(X_t, Y_t)] && \text{(マルコフの不等式)} \\ &\leq (1 - \alpha)^t D \\ &\leq n \exp(-\alpha t) \end{aligned}$$

□ これに $t \geq \alpha^{-1}(\log D + \log \epsilon^{-1})$ を代入すると

$$D \exp(-\alpha t) \leq D \exp(-(\log D + \log \epsilon^{-1})) = \epsilon$$

□ $\tau_{\text{mix}}(\epsilon) = \min\{t \mid \forall t' \geq t, d_{TV}(P^{t'}, \pi) \leq \epsilon\}$ より題意を得る.

EX: 0-1HYPERCUBE

マルコフ連鎖

状態空間 $\Omega = \{0,1\}^n$

$$\text{推移確率 } P(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = y \\ \frac{1}{2n} & |x \oplus y| = 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

定理 6.2.

$$\tau \leq n(1 + \log n)$$

証明

$|x \oplus y| = 1$ に対して $d(X', Y') = 1 - \frac{1}{n}$

よって $\tau \leq n^2$

COLORING

目標分布

標本空間： $\Omega = \{x \in \{1, \dots, q\}^V \mid x \text{は適切な彩色}\}$

確率関数： $f(x) = \frac{1}{c} \quad x \in \Omega$ (一様分布, $c = |\Omega|$)

マルコフ連鎖 (メトロポリス法)

状態空間： Ω

状態遷移：

1. $v \in V$ を一様ランダムに選ぶ
2. $k \in \{1, \dots, q\}$ を一様ランダムに選ぶ.
3. v の色を k として適切ならその状態に遷移する.
不適切なら元の状態を維持する.

定理 6.3.

任意のグラフに対して、 $q > \Delta + 1$ なら極限分布は一様分布

定理 6.4.

G の最大次数を Δ とする. $q \geq 2\Delta + 1$ のとき

$$\tau(\epsilon) \leq \left\lceil \frac{q}{q - 2\Delta} n(\log n + \log \epsilon^{-1}) \right\rceil = O(n \log n)$$

証明

□ Path coupling

- $(v, k) \in V \times \chi$ を一様ランダムに選んで推移させる.
 - v は彩色 x と y によって決まる(後述).
- X, Y に対して $X = z_0, z_1, \dots, z_r = Y$ s.t. $\rho(z_i, z_{i+1}) = 1$ とする.
- $Z'_i = \phi(z_i, v, k)$ とする.

$$C_X \leftrightarrow C_Y$$

$$C_Y \leftrightarrow C_X$$

$$c \leftrightarrow c$$

□ $\forall \{x, y\} \in E, E[d(X', Y') | X = x, Y = y] \leq 1 - \frac{q-2\Delta}{nq}$

➤ $x(v_0) \neq y(v_0)$ とする.

➤ $v = v_0$ の時, $\Pr[d(X', Y') = 0] \geq 1 - \frac{N(v_0)}{q} \geq 1 - \frac{\Delta}{q}$

➤ $v \in N(v_0)$ の時, $\Pr[d(X', Y') = 2] \leq \frac{1}{q}$

この工夫がない
と $\frac{2}{q}$ になる。

$$\begin{aligned} E[d(X', Y')] &\leq d(x, y) + (-1) \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\Delta}{q}\right) + (+1) \frac{N(v_0)}{n} \frac{1}{q} \\ &\leq 1 - \frac{q - \Delta}{nq} + \frac{\Delta}{nq} = 1 - \frac{q - 2\Delta}{nq} \end{aligned}$$

□ Path coupling定理より

$$\tau \leq \frac{nq}{q - 2\Delta} (\log D + \log \epsilon^{-1})$$

分割表

例: 2行分割表のランダム生成

2元分割表

- ✓ 各セルには非負整数が入る
- ✓ (与えられた) 周辺和を満たす

						12
						18
5	4	3	7	5	6	30

問題

Given: 周辺和

出力: 分割表の**一様ランダム**生成

例: 2行分割表に対するマルコフ連鎖

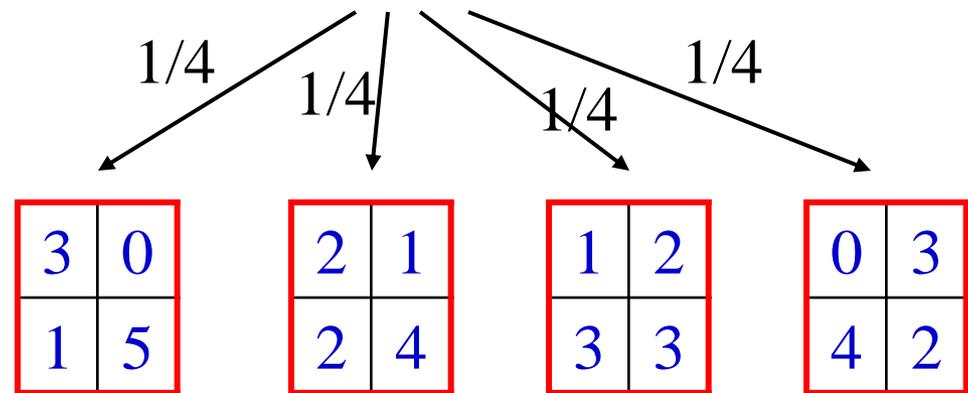
- 列 i, j を選ぶ。
- i 列目と j 列目に対して
推移可能な状態に
等確率で推移する。

3	0	3
1	5	6
4	5	10

+

$+k$	$-k$
$-k$	$+k$

	i	j				
	↓	↓				
4	3	2	3	0	0	12
1	1	1	4	5	6	18
5	4	3	7	5	6	30



定理

マルコフ連鎖の極限分布は一様分布.

定理 6.5.

$$\tau \leq O(n^2(\log N - \log \epsilon)) \longleftarrow N \text{ は分割表の総和}$$

証明

距離 $d(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |X_{1j} - Y_{1j}|$ と定義する.

$G = (\Omega, E)$ は $E = \{\{U, V\} | d(U, V) = 1\}$ とする.

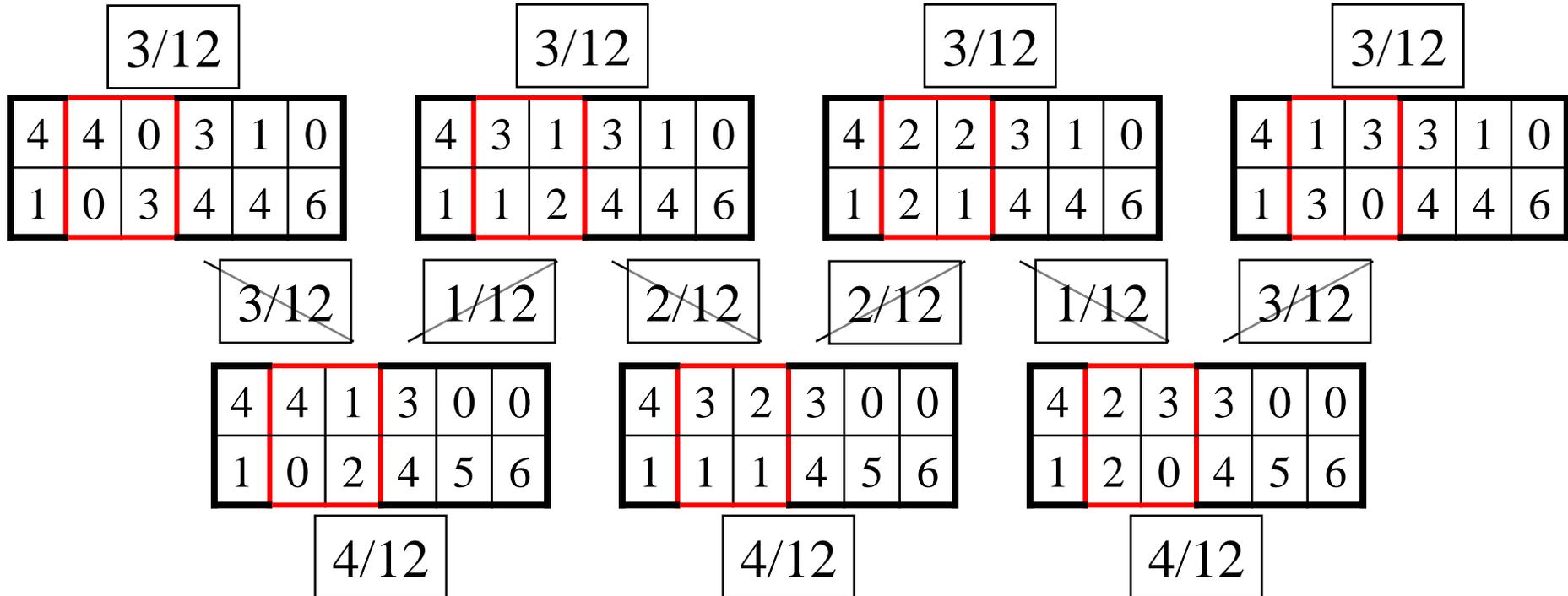
$d(U, V) = 1$ は i 列と j 列の値が (1) 異なるとする.

- i, j が選ばれる確率 $\frac{2}{n(n-1)}$ 距離は 0
- i, j 以外が選ばれる確率 $\frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}$ 距離は 1
- i または j が選ばれる確率 $\frac{4(n-2)}{n(n-1)}$ 距離は 1 \longleftarrow 次ページ参照

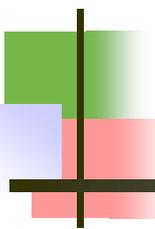
よって $E[d(U', V')] \leq \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right) d(U, V)$.

経路カップリング定理より $\tau \leq \frac{n(n-1)}{2} \log \Omega$

type c)

$$X \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 4 & 4 & 6 \\ \hline \end{array}$$


$$Y \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}$$



おわり
