6. Path coupling

来嶋 秀治

滋賀大学 データサイエンス学部

PATH COUPLING

定理 6.1. (path coupling)

距離$d(x,y)$は辺長$l(\{u,v\})$の無向グラフ$G=(V,E;l)$上の最短経路長とする．ただし$\min_{x\neq y} d(x,y)\geq 1$とし，また$D=\max_{x,y} d(x,y)$とする．Coupling (X,Y)に対して，

あるα $(0<\alpha<1)$が存在して，任意の$x,y\in E$に対して

$$E[d(X',Y')]\leq(1-\alpha)d(x,y) \quad (*)$$

を満たすとき，mixing timeは

$$\tau_{\mathrm{mix}}\leq\alpha^{-1}(\ln D+\ln\epsilon^{-1})$$

- まず，条件(*)の下 $E[d(X',Y')] \le (1-\alpha)E[d(X,Y)]$を示す.
  - 任意のx,yに対して$x=z_0,z_1,\ldots,z_r=y$ は最短経路とする; i.e., $\{z_i,z_{i+1}\}\in E$.
  - Couplingにより$z_i \mapsto Z_i'$へと遷移するものとする. $\{Z_i,Z_{i+1}\}\in E$とは限らない.
  - 任意のx,yに対して
$$E[d(X',Y')] = \sum_{i=0}^{r-1} E[d(Z_i',Z_{i+1}')] \le (1-\alpha)\sum_{i=0}^{r-1} d(z_i,z_{i+1}) = (1-\alpha)d(x,y)$$
  - したがって，任意の確率変数X,Yに対しても題意を得る.
- 帰納的に$E[d(X_t,Y_t)] \le (1-\alpha)^t E[d(X_0,Y_0)] \le (1-\alpha)^t D$を得る.
- Coupling Lemmaより$d_{TV}(P^t,\pi) \le \Pr[X_t \neq Y_t]$.

$$\begin{aligned}\Pr[X_t \neq Y_t] &= \Pr[d(X_t,Y_t)\ge 1] && \left(\min_{x\neq y} d(x,y) \ge 1\text{より}\right)\\ &\le \mathrm{E}[d(X_t,Y_t)] && (\text{マルコフの不等式})\\ &\le (1-\alpha)^t D\\ &\le n\exp(-\alpha t)\end{aligned}$$

- これに$t \ge \alpha^{-1}(\log D + \log \epsilon^{-1})$を代入すると
$$D\exp(-\alpha t) \le D\exp\left(-(\log D + \log\epsilon^{-1})\right) = \epsilon$$
- $\tau_{\mathrm{mix}}(\epsilon) = \min\left\{t \middle| \forall t' \ge t, d_{TV}\left(P^{t'},\pi\right) \le \epsilon\right\}$より題意を得る.

EX: 0-1HYPERCUBE

マルコフ連鎖

状態空間$\Omega = \{0,1\}^n$

推移確率$P(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = y \\ \frac{1}{2n} & |x \oplus y| = 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$

定理 6.2.

$\tau \leq n(1 + \log n)$

証明

$|x \oplus y| = 1$に対して$d(X', Y') = 1 - \frac{1}{n}$

よって$\tau \leq n^2$

COLORING

目標分布

標本空間：$\Omega = \{x \in \{1, \dots, q\}^V \mid x$は適切な彩色$\}$

確率関数：$f(x) = \frac{1}{c} \ \ x \in \Omega$（一様分布,$c = |\Omega|$）

マルコフ連鎖（メトロポリス法）

状態空間：Ω

状態遷移：

1. $v \in V$を一様ランダムに選ぶ
2. $k \in \{1, \dots, q\}$を一様ランダムに選ぶ.
3. vの色をkとして適切ならその状態に遷移する.
   不適切なら元の状態を維持する.

定理 6.3.

任意のグラフに対して、$q > \Delta + 1$なら極限分布は一様分布

定理 6.4.

Gの最大次数をΔとする． $q \geq 2\Delta + 1$のとき

$$\tau(\epsilon) \leq \left\lceil \frac{q}{q - 2\Delta} n(\log n + \log \epsilon^{-1}) \right\rceil = O(n \log n)$$

証明

- **Path coupling**
  - $(v,k) \in V \times \chi$を一様ランダムに選んで推移させる.
    - vは彩色xとyによって決まる(後述).
  - X, Yに対して$X = z_0, z_1, \ldots, z_r = Y$ s.t. $\rho(z_i, z_{i+1}) = 1$とする.
  - $Z_i' = \phi(z_i, v, k)$とする.

$c_X \leftrightarrow c_Y$
$c_Y \leftrightarrow c_X$
$c \leftrightarrow c$

- $\forall\{x,y\} \in E,\ \mathrm{E}[d(X',Y') \mid X = x, Y = y] \le 1 - \frac{q-2\Delta}{nq}$
  - $x(v_0) \ne y(v_0)$とする.
  - $v = v_0$の時, $\Pr[d(X',Y') = 0] \ge 1 - \frac{N(v_0)}{q} \ge 1 - \frac{\Delta}{q}$
  - $v \in N(v_0)$の時, $\Pr[d(X',Y') = 2] \le \frac{1}{q}$

この工夫がないと$\frac{2}{q}$になる.

$$\mathrm{E}[d(X',Y')] \le d(x,y) + (-1)\frac{1}{n}\left(1 - \frac{\Delta}{q}\right) + (+1)\frac{N(v_0)}{n}\frac{1}{q}$$

$$\le 1 - \frac{q-\Delta}{nq} + \frac{\Delta}{nq} = 1 - \frac{q-2\Delta}{nq}$$

- **Path coupling定理より**

$$\tau \le \frac{nq}{q-2\Delta}(\log D + \log \epsilon^{-1})$$

分割表

例: 2行分割表のランダム生成

2元分割表

- ✓ 各セルには非負整数が入る
- ✓ （与えられた）周辺和を満たす

						12
						18
5	4	3	7	5	6	30

問題

Given: 周辺和

出力: 分割表の一様ランダム生成

例: 2行分割表に対するマルコフ連鎖

- 列i, jを選ぶ.
- i列目とj列目に対して推移可能な状態に等確率で推移する。

3	0	3
1	5	6
4	5	10

+

$+k$	$-k$
$-k$	$+k$

i j

4	3	2	3	0	0	12
1	1	1	4	5	6	18
5	4	3	7	5	6	30

1/4 1/4 1/4 1/4

3	0
1	5

2	1
2	4

1	2
3	3

0	3
4	2

定理

マルコフ連鎖の極限分布は一様分布.

定理 6.5.
$\tau \leq O\left(n^2(\log N - \log \epsilon)\right)$

Nは分割表の総和

証明

距離$d(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left|X_{1j} - Y_{1j}\right|$と定義する.

$G = (\Omega, E)$は$E = \{\{U,V\}|d(U,V) = 1\}$とする.

$d(U,V) = 1$はi列とj列の値が(1)異なるとする.

- i,jが選ばれる確率$\frac{2}{n(n-1)}$ 距離は0
- i,j以外が選ばれる確率$\frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}$距離は1
- iまたはjが選ばれる確率$\frac{4(n-2)}{n(n-1)}$ 距離は1

次ページ参照

よって$E[d(U',V')] \leq \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)d(U,V)$.

経路カップリング定理より$\tau \leq \frac{n(n-1)}{2}\log \Omega$

type c)

X

4	2	2	3	1	0
1	2	1	4	4	6

3/12

4	4	0	3	1	0
1	0	3	4	4	6

3/12

4	3	1	3	1	0
1	1	2	4	4	6

3/12

4	2	2	3	1	0
1	2	1	4	4	6

3/12

4	1	3	3	1	0
1	3	0	4	4	6

~~3/12~~ ~~1/12~~ ~~2/12~~ ~~2/12~~ ~~1/12~~ ~~3/12~~

4	4	1	3	0	0
1	0	2	4	5	6

4/12

4	3	2	3	0	0
1	1	1	4	5	6

4/12

4	2	3	3	0	0
1	2	0	4	5	6

4/12

Y

4	3	2	3	0	0
1	1	1	4	5	6

おわり